

n°63 p 69

1) On a $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

et $|\bar{z}| = |x - iy| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$

donc $|z| = |\bar{z}|$.

De même $|-z| = |-x - yi| = \sqrt{(-x)^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$

donc $|-z| = |z|$.

2) a) On a $z \times z' = (x + yi)(x' + y'i)$

$= (xx' - yy') + (xy' + x'y)i$

donc $|z \times z'| = \sqrt{(xx' - yy')^2 + (xy' + x'y)^2}$

$= \sqrt{(xx')^2 + (yy')^2 - 2xx'yy' + (xy')^2 + (x'y)^2 + 2x'xy'}$

$= \sqrt{(xx')^2 + (yy')^2 + (xy')^2 + (x'y)^2}$

et d'autre part :

$|z| \times |z'| = \sqrt{x^2 + y^2} \times \sqrt{(x')^2 + (y')^2}$

$= \sqrt{(x^2 + y^2)(x'^2 + y'^2)}$

$= \sqrt{x^2(x')^2 + y^2(x')^2 + x^2(y')^2 + y^2(y')^2}$

$= \sqrt{(xx')^2 + (x'y)^2 + (xy')^2 + (yy')^2}$

donc $|z \times z'| = |z| \times |z'|$.

b) Initialisation : pour $n=0$ on a $|z^0| = |1| = 1$

et $|z|^0 = 1$ donc la propriété est vraie.

Hérédité : fixons $n \in \mathbb{N}$ et supposons $|z^n| = |z|^n$.

Alors $|z^{n+1}| = |z^n \times z| = |z^n| \times |z|$ d'après le a)

$= |z|^n \times |z|$ d'après l'hypothèse de

$= |z|^{n+1}$ récurrence

Conclusion : la propriété est initialisée et héréditaire donc d'après le principe de récurrence elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3) a) Dire que $z \neq 0$ signifie que x et y ne sont pas tous les deux nuls. Alors :

$\frac{z}{z'} = \frac{x + yi}{x' + y'i} = \frac{(x + yi)(x' - y'i)}{(x' + y'i)(x' - y'i)} = \frac{(xx' - yy') + (xy' + x'y)i}{(x')^2 + (y')^2}$

b) On en déduit que

$\left| \frac{z}{z'} \right| = \sqrt{\left(\frac{xx' - yy'}{(x')^2 + (y')^2} \right)^2 + \left(\frac{xy' + x'y}{(x')^2 + (y')^2} \right)^2}$

$= \frac{\sqrt{(xx' - yy')^2 + (xy' + x'y)^2}}{\sqrt{((x')^2 + (y')^2)^2}}$

$= \frac{\sqrt{(xx')^2 + (yy')^2 - 2xx'yy' + (xy')^2 + (x'y)^2 + 2x'xy'}}{(x')^2 + (y')^2}$

$= \frac{\sqrt{(xx')^2 + (yy')^2 + (xy')^2 + (x'y)^2}}{(x')^2 + (y')^2}$

alors que dans le même temps

$\frac{|z|}{|z'|} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} \times \sqrt{(x')^2 + (y')^2}}{(x')^2 + (y')^2}$

$= \frac{\sqrt{(xx')^2 + (x'y)^2 + (xy')^2 + (yy')^2}}{(x')^2 + (y')^2}$

ce qui prouve $\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$.

c) On a déjà vu, si $n \geq 0$, que $|z^n| = |z|^n$.

Si n est négatif alors

$|z^n| = \left| \frac{1}{z^{-n}} \right| = \frac{1}{|z^{-n}|} = \frac{1}{|z|^{-n}} = |z|^n$

d'après b) et $|1| = 1$ d'après 2) car $-n \in \mathbb{N}$.

Finalement la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{Z}$.