n°24 p.156

1) 143 est divisible par 11 ($1+3 \equiv 4$)

2) 149 n'est pas divisible par 2, par 3 par 5, par 7 (sinon $149-7\times 7=100$ le serait) par 11 (car $1+9 \not\equiv 4$). Cela suffit pour conclure que 149 est premier puisque $13^2=169>149$.

3) 173 n'est pas divisible par 2, par 3, par 5, par 7 (sinon $180=173+7$ le serait) par 11 (car $1+3\not\equiv 7$), par 13 (sinon $173-13 = 160 = 2^4\times 2^1\times 5$ le serait). Cela suffit pour conclure que 173 est premier puisque $17^2=289>173$).

4) 269 n'est pas divisible par 2, par 3, par 5, par 7 (car 280 est un multiple de 7 et donc les précédents sont 273 et 266) par 11 (car $2+9\not\equiv 6$) par 13 (sinon $269-13\times 20=9$ le serait) et cela suffit pour conclure que 269 est premier puisque $17^2=289>269$.

5) 539 est divisible par 11 (car $5+9\equiv 3$)
en fait : $539+11=550=11\times 50$
donc $539=11\times 49$.

n°75 p.161

Commençons par remarquer que
$15^k \equiv 4^k\ [11]$ (puisque $15\equiv 4$)
et ensuite : $4^0\equiv 1$; $4^1\equiv 4$; $4^2\equiv 16\equiv 5$;
$4^3\equiv 4^2 4\equiv 5\times 4\equiv 20\equiv 9$; $4^4\equiv 4^2\times 4^2\equiv 5\times 5\equiv 25\equiv 3$; $4^5\equiv 4^4\times 4\equiv 3\times 4\equiv 12\equiv 1$.

~~D'après le théorème de Fermat on a $15^{11}\equiv 15\ [11]$ donc avec la division euclidienne de 15^n par 11, disons $15^n=11q+r$, on obtient~~
~~$15^{15^n}\equiv 15^{11q+r}\equiv (15^{11})^q\times 15^r\equiv 15^r\ [11]$~~

Dès lors : si k est un multiple de 5, disons $k=5\times \ell$, on a

$$15^k\equiv 15^{5\times\ell}\equiv (15^5)^\ell\equiv (4^5)^\ell\equiv 1^\ell\equiv 1\ [11].$$

En particulier si $n\in\mathbb{N}^*$, $k=15^n$ est un multiple de 5, et donc :

$$15^{15^n}\equiv 1\ [11].$$

n°76 p.161

1) On a $3^{80}\equiv 1\ [2]$ (puisque c'est un nombre impair !) et $3^4\equiv 1\ [5]$ d'après le petit théorème de Fermat (puisque 5 ne divise pas 3). Donc $3^{80}\equiv (3^4)^{20}\equiv 1^{20}\equiv 1\ [5]$.

Alors $2 \mid 3^{80}-1$
$5 \mid 3^{80}-1$

donc d'après le théorème fondamental de l'arithmétique $10=2\times 5 \mid 3^{80}-1$. En particulier $3^{80}\equiv 1\ [10]$ donc le chiffre des unités de 3^{80} est 1.

2) On a $7^{28}\equiv 1\ [2]$ (puisque c'est un nombre impair !) et $7^4\equiv 1\ [5]$ d'après le petit théorème de Fermat. Ainsi $7^{28}\equiv 7^{4\times 7}\equiv (7^4)^7 \equiv 1^7\equiv 1\ [5]$. Comme $7^{28}-1$ se factorise par 2 et par 5, il se divise par $2\times 5=10$, et donc $7^{28}\equiv 1\ [10]$. Ainsi le chiffre des unités de 7^{28} est 1.