T^{ALE} GÉNÉRALE — *Exercices de mathématiques (expertes)*

MULTIPLICATION

§1. Petites questions

1 Sans calculatrice : que vaut $997 \times 1\,003$?

2 Énumérer (sans calculatrice) les carrés jusqu'à 20^2. Ça commence ainsi : 0, 1, 4, 9, 16, etc.. A-t-on besoin de faire des multiplications pour les trouver ?

3 Quel est le plus petit carré supérieur ou égal à 10^9 ? Et peut-on répondre sans calculatrice ?

4 Quel est le plus petit entier naturel qui n'est pas la somme de trois carrés ? Ce n'est déjà pas 0, puisque $0 = 0^2 + 0^2 + 0^2$. Ce n'est pas non plus 1, puisque $1 = 1^2 + 0^2 + 0^2$.

5 Peut-on trouver deux entiers naturels x et y tels que $x^2 + y^2 = 1\,007$?

6 Combien y a-t-il de couples $(x, y) \in \mathbf{N}^2$ tels que $x + y^2 = 1000$?

7 Sur le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 25$, combien y a-t-il de points à coordonnées entières ?

8 Écrire 112 comme une somme de plusieurs entiers consécutifs. Quelques exemples (avec d'autres nombres que 112) : $15 = 7 + 8$, $42 = 13 + 14 + 15$ ou $10 = 1 + 2 + 3 + 4$.

9 Parmi les nombres à trois chiffres, combien sont des cubes ?

10 Sans calculatrice, qui est le plus grand : $1/7 + 1/10$ ou $1/8 + 1/9$?

11 Toujours sans calculatrice, qui est le plus grand : $10 + \sqrt{31}$ ou $11 + \sqrt{20}$?

12 Peut-on écrire $1\,000$ comme la somme de deux carrés ?

13 Peut-on écrire $10\,000$ comme la somme de trois cubes ?

14 Quel est le plus petit entier naturel qu'on *ne peut pas* écrire comme la somme de huit cubes ?

15 Énumérer toutes les puissances non triviales (c'est-à-dire les nombres de la forme a^b avec a et b entiers et au moins égaux à 2) inférieures à 100.

16 Si un nombre est à la fois un carré et un cube, est-ce que c'est forcément une puissance sixième ?

17 Trouver un nombre (au moins égal à 2) qui apparaît au moins sept fois dans le triangle de Pascal.

18 On fait la somme des « diagonales montantes » dans le triangle de Pascal.

1 1 2 3 5 8

1					
1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1

Quelle suite voit-on apparaître, et pourquoi ?

19 Sur une ligne du triangle de Pascal, le nombre (ou les deux nombres) le(s) plus grand(s) est (sont) au milieu. Pourquoi ?

20 Si n est impair, il y a deux nombres consécutifs égaux sur la ligne n du triangle de Pascal. Pourquoi ?

21 On dessine le triangle de Pascal jusqu'à la ligne $n = 10$, incluse. Quelle est la somme de tous les nombres qui apparaissent ?

22 Est-ce qu'on peut faire un carré en « collant » un carré à lui-même ? Par exemple, avec $16 = 4^2$, ça ne marche pas, parce que 1 616 n'est pas un carré. Ça ne marche pas non plus avec $100 = 10^2$, car 100 100 n'est pas un carré.

23 Trouver tous les carrés qu'on peut écrire comme le produit de trois entiers naturels consécutifs. Par exemple, il y a $0^2 = 0 \times 1 \times 2$.

24 Quel est le plus petit nombre x tel que $x!$ se divise par 2^{10} ?

25 Quel est le plus petit nombre x tel que $x!$ se divise par 2^{100} ?

26 Qui est le plus grand entre $99!$ et 50^{99} ?

27 Qui est le plus grand entre $100!$ et 50^{98} ?

28 Combien y a-t-il de zéros à la fin de $100!$?

29 Juste avant qu'il n'y ait plus que des zéros, quel est le dernier chiffre de $100!$?

30 Parmi les factorielles, lesquelles sont des carrés ? Par exemple il y a $0!$ et $1!$ qui sont égales à 1^2.

31 Si $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, etc. est la suite de Fibonacci, démontrer que

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \ldots + F_n^2 = F_n \times F_{n+1}.$$

§2. Carrés

32

a) Énumérer les carrés de 0^2 à 20^2, et observer les écarts entre les termes successifs de la suite.

b) Rappeler la première identité remarquable, et l'appliquer à $(n+1)^2$.

c) Quel est le rapport entre les deux questions précédentes ?

d) Démontrer que la somme des n premiers nombres impairs (le premier étant 1) vaut n^2. Indication : utiliser (en l'expliquant) la relation

$$1+3+5+\ldots = (1^2-0^2)+(2^2-1^2)+(3^2-2^2)+\ldots.$$

33 Rappeler la troisième identité remarquable, puis calculer sans calculatrice :

a) 19×21, **b)** 17×23, **c)** 95×105,
d) 99×101, **e)** 82×78, **f)** 92×98.

34 On dit qu'un entier x est *pair* lorsqu'il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $x = 2k$. Et on dit que x est *pair* lorsque $x-1$ est pair, c'est-à-dire lorsqu'il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $x = 2k+1$.

a) Soient $x, y \in \mathbf{Z}$. Démontrer que x et y ont la même parité si et seulement si $x - y$ est pair.

b) Démontrer que $x-y$ et $x+y$ ont toujours la même parité.

c) Démontrer qu'un nombre et son carré ont toujours la même parité.

35 Démontrer que quel que soit $x \in \mathbf{Z}$, le nombre $x^2 + x + 1$ est impair.

36

a) Démontrer que si un carré est pair, alors il se factorise par 4.

b) Soit $x \in \mathbf{Z}$. Démontrer que si x^2 est impair, alors $x^2 - 1$ se factorise par 4.

c) Si $t \in \mathbf{Z}$ se factorise par 4, est-ce que $t+1$, $t+2$ et $t+3$ peuvent se factoriser par 4 ? Pourquoi ?

d) En conséquence : si $x, y \in \mathbf{Z}$, est-il possible que $x^2 + y^2 - 3$ se factorise par 4 ?

e) Justifier que 1 007 ne peut pas s'écrire comme la somme de deux carrés.

37 Le but de cet exercice est de démontrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel. On procède par l'absurde, et on suppose qu'on a pu écrire $\sqrt{2}$ sous la forme d'une fraction *irréductible* a/b, avec a et b des entiers strictement positifs.

a) Justifier que $a^2 = 2b^2$.

b) En déduire que a est pair, ce qui permet de l'écrire $a = 2a'$, avec $a' \in \mathbf{N}$.

c) Montrer que b est pair lui aussi.

d) Où est la contradiction ?

38 Vérifier que la démonstration de l'exercice précédent permet de démontrer que $\sqrt{6}$ et $\sqrt{10}$ sont irrationnels. Avec quels autres nombres cette démonstration fonctionne-t-elle ? (On verra le cas général dans le chapitre III.)

39

a) Trouver tous les $k \in \mathbf{N}$ tels que $\sqrt{k^2+1}$ est entier.

b) Trouver tous les $k \in \mathbf{N}$ tels que $\sqrt{k^2+2}$ est entier.

40 Trouver tous les $n \in \mathbf{N}$ tels que $\sqrt{n^2+n+1}$ est entier.

41 Soit s un entier naturel et soient a et b deux entiers positifs tels que $a+b=s$. Démontrer que $a\times b$ est maximal lorsque $|a-b|$ est minimal.

42 **Multiplication parabolique.** On suppose donnée, dans un repère orthogonal, la courbe représentative $\mathscr{P}$ de la fonction $f(x)=x^2$. Soient u et v deux entiers naturels ; on considère les points A et B de $\mathscr{P}$, d'abscisses respectives $-u$ et v. Enfin, on note M l'intersection de (AB) avec l'axe des ordonnées.

a) Que se passe-t-il lorsque $u=v=0$?

b) Dans les autres cas, montrer que l'ordonnée de M est égale à $u\times v$. Autrement dit, à partir de la parabole et d'une règle graduée, on peut calculer « géométriquement » des multiplications.

43 Écrire un programme qui étant donné un nombre x calcule et renvoie une liste de quatre entiers a, b, c et d tels que $x=a^2+b^2+c^2+d^2$ (on admet qu'il y a *toujours* une solution : c'est le *théorème des quatre carrés*).

44 Modifier le programme de l'exercice précédent pour qu'il renvoie la liste la plus courte possible (donc de longueur au maximum 4). En déduire les cent plus petits nombres qu'on ne peut pas écrire comme la somme de trois carrés.

§3. Cubes et puissances

45 Énoncer et démontrer les identités remarquables pour $(a+b)^3$ et $(a-b)^3$.

46 Énoncer et démontrer les identités remarquables pour a^3+b^3 et a^3-b^3.

47 En utilisant l'identité remarquable pour a^3+b^3, montrer que $1\,001$ se factorise par 11, que $1\,000\,001$ se factorise par 101, et finalement que $1\,000\,000\,001$ se factorise par 11.

48 Un nombre *taxicab* d'ordre n est un nombre qu'on peut écrire de n manières différentes (exactement n manières, mais à l'ordre près) comme la somme de deux cubes strictement positifs. Par exemple

$$4\,104 = 2^3+16^3 = 9^3+15^3$$

est un nombre taxicab d'ordre 2 (les écritures 16^3+2^3 ou 15^3+9^3 ne comptent pas : on les obtient en permutant les termes des précédentes).

a) Écrire un programme qui étant donné M construit un tableau `T` de longueur M + 1, tel que pour tout indice x, `T[x]` est le nombre de manières d'écrire x comme la somme de deux cubes (à l'ordre près des termes).

b) On note $\mathrm{Ta}(n)$ le plus petit nombre taxicab d'ordre n. Par exemple $\mathrm{Ta}(1)=2$, puisque $2=1^3+1^3$. Calculer $\mathrm{Ta}(2)$.

c) Trouver les dix plus petits nombres taxicab d'ordre 2.

d) Calculer $\mathrm{Ta}(3)$.

e) Pourquoi cela s'appelle-t-il un nombre taxicab ?

49 Soit x un entier strictement positif. Écrire un programme qui trouve le plus petit $n\in\mathbf{N}-\{0\}$ tel que $x\geqslant 10^{n-1}$. Que représente ce n pour le nombre x ?

50 Énoncer et démontrer une affirmation concernant la parité de x^n par rapport à celle de x, pour $n\geqslant 1$ (le cas $n=2$ a été traité dans la section §**2**).

51 Écrire un programme qui étant donné un nombre x calcule et renvoie une liste de neuf entiers `[`x_0`,` x_1`, ...,` x_8`]` telle que $x=x_0^3+x_1^3+\ldots+x_8^3$. On admet que c'est *toujours* possible (c'est le *théorème des neuf cubes*, prouvé en 1912).

52 Reprendre l'exercice précédent, mais en renvoyant cette fois-ci la liste la plus courte possible (elle sera donc de longueur au plus 9). En déduire les cinq plus petits entiers qui ne peuvent pas s'écrire comme la somme de huit cubes.

53 Calculer $1+2+4+8+\ldots+2^n$.

54 Donner une formule $f(n)$ qui donne le nombre s'écrivant avec n chiffres 5 :

$$f(n)=\underbrace{555\ldots5}_{n\text{ fois le }5}.$$

§4. Factorielles

55 Sans calculatrice, donner les valeurs de $x!$ pour x allant de 0 à 10.

56 Simplifier les fractions suivantes.

a) $\dfrac{3!}{2!\times4!}$, **b)** $\dfrac{4!\times5!}{3!\times6!}$, **c)** $\dfrac{6!\times4!}{7!\times5!}$,

d) $\dfrac{3!\times9!}{5!\times7!}$, **e)** $\dfrac{10!}{4!\times5!\times6!}$, **f)** $\dfrac{10!\times20!}{30!}$.

57 Écrire le programme `Factorielle(`x`)`.

58

a) Si x est un entier naturel, quel est le lien entre le test x `% 10 == 0` et le dernier chiffre de x ?

b) En déduire un programme qui compte le nombre de zéros à la fin d'un entier strictement positif.

c) Puis écrire un programme qui renvoie le dernier chiffre non nul de x. Par exemple, pour $x = 14\,800$, le dernier chiffre non nul est 8.

d) Quel est le dernier chiffre non nul de 100! ?

e) Écrire un programme qui compte le nombre de zéros à la fin de $x!$. A-t-on besoin de calculer $x!$ pour trouver la réponse ?

59 Écrire un programme `Derniers(`x`, `n`)` qui donne les n derniers chiffres non nuls de $x!$. Par exemple, pour $x = 10$ et $n = 3$, on obtient 288, car $10! = 3\,628\,800$.

60 Écrire un programme `Premiers(`x`, `n`)` qui renvoie les n premiers chiffres de $x!$. Quels sont les 10 premiers chiffres de la factorielle de 1 000 000 ? Pour cet exercice, on pourra s'aider du paragraphe « développement asymptotique » de la page sur la *formule de Stirling*, dans Wikipédia.

61 Calculer

$$\sum_{k=1}^{n}(k \times k!) = 1 \times 1! + 2 \times 2! + \ldots + n \times n!$$

en faisant apparaître une somme téléscopique.

62

a) Soit n un entier strictement positif et soit $k \in \{2\,;3\,;\ldots\,;n\}$. Démontrer que $n! + k$ n'est pas un nombre premier.

b) Soit n un entier naturel. Démontrer qu'on peut toujours trouver n entiers consécutifs parmi lesquels il n'y a *aucun* nombre premier.

§5. Nombres quadratiques

63 Démontrer sans calculatrice que $\sqrt{2} < 3/2$.

64 Démontrer sans calculatrice que $\sqrt{2} > 7/5$.

65 Démontrer sans calculatrice l'encadrement

$$2 + \frac{2}{10} < \sqrt{5} < 2 + \frac{3}{10}.$$

66 Simplifier :

a) $(3+\sqrt{6}) \times (2-2\sqrt{6})$,

b) $(10-3\sqrt{2}) \times (5-7\sqrt{2})$,

c) $(2+\sqrt{10})^2 + (3-\sqrt{10})^2$,

d) $(1+\sqrt{6}) \times (\sqrt{3}-\sqrt{2})$,

e) $(3-\sqrt{3}) \times (\sqrt{6}-\sqrt{2})$,

f) $(\sqrt{10}+\sqrt{5}) \times (\sqrt{2}-1)$.

67 Trouver le signe des quantités suivantes :

a) $\sqrt{7}-2$, **b)** $\sqrt{13}-4$, **c)** $\sqrt{71}-2\sqrt{17}$,

d) $\sqrt{197}-15$, **e)** $\sqrt{3\,129}-56$, **f)** $\sqrt{40}-13/2$.

68 Développer et réduire $(\sqrt{2}-1)^3$.

69

a) Écrire un programme qui trouve deux entiers a et b tels que $(\sqrt{2}-1)^n = a - b\sqrt{2}$.

b) Justifier que la fraction a/b est alors une bonne approximation de $\sqrt{2}$ (et plus n est grand, meilleure est-elle).

70 Trouver (sans calculatrice !) le signe de

$$\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{15}.$$

71 Qui est le plus grand entre $\sqrt{19}+\sqrt{24}$ et $\sqrt{21}+\sqrt{22}$?

72 On rappelle le principe des « facteurs carrés » : lorsqu'on peut mettre un carré en facteur dans x, alors on peut changer l'écriture de $\sqrt{x}$. Par exemple

$$\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}.$$

Simplifier les expressions suivantes, lorsque c'est possible :

a) $\sqrt{2}+\sqrt{8}$, **b)** $\sqrt{32}-\sqrt{8}$,

c) $\sqrt{5}+\sqrt{5}+\sqrt{20}$, **d)** $\sqrt{12}+\sqrt{27}$,

e) $4\sqrt{5}-\sqrt{20}$, **f)** $\sqrt{1000}+\sqrt{250}+\sqrt{160}$.

73 Même consigne :

a) $\sqrt{128}+\sqrt{512}$, **b)** $\sqrt{1024}-\sqrt{625}$,

c) $\sqrt{15}+\sqrt{25}+\sqrt{75}$, **d)** $\sqrt{40}+\sqrt{90}-\sqrt{160}$,

e) $\sqrt{\sqrt{10^9}}$, **f)** $\sqrt{5^3 \times 7^5} - \sqrt{5^7 \times 7}$.

74 Soit d un entier. On considère l'ensemble des nombres de la forme $a + b\sqrt{d}$, avec $a, b \in \mathbf{Z}$. Cet ensemble s'appelle $\mathbf{Z}[\sqrt{d}]$. (Lorsque d est négatif, ce sont des nombres *imaginaires*, puisque la racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas. On les étudiera longuement à partir du chapitre V.)

a) On pose $x = 3 + \sqrt{2}$ et $y = 4 - 3\sqrt{2}$. Donner une écriture simple de $x + y$, de $x - y$ et de $x \times y$.

b) Démontrer que l'ensemble $\mathbf{Z}[\sqrt{d}]$ est stable par additions, par soustractions, et par multiplications.

75 On considère $x = 23 - 8\sqrt{7}$. On cherche deux entiers a et b tels que $\sqrt{x} = a + b\sqrt{7}$.

a) S'ils existent, montrer qu'ils satisfont les équations $a^2 + 7b^2 = 23$ et $ab = -4$.

b) Quelles sont toutes les factorisations possibles pour -4 ? En déduire les couples (a, b) possibles.

c) Parmi ces couples, le(s)quel(s) marche(nt) ?

76 Soit d un entier. On considère l'ensemble des nombres de la forme $a + b\sqrt{d}$, avec $a, b \in \mathbf{Q}$. Cet ensemble s'appelle $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$.

a) On appelle *quantité conjuguée* de $a + b\sqrt{d}$ le nombre $a - b\sqrt{d}$. Quels sont les conjugués de $3 + \sqrt{2}$, de $4 - 3\sqrt{2}$ et de $-6 - 11\sqrt{2}$?

b) Poursuivre le calcul suivant :

$$\frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = \frac{(2+\sqrt{5}) \times (1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5}) \times (1-\sqrt{5})} = \dots .$$

c) En utilisant la quantité conjuguée, simplifier

$$\frac{3-4\sqrt{2}}{4-3\sqrt{2}}.$$

d) Lorsque $a' + b'\sqrt{d} \neq 0$, démontrer que

$$\frac{a+b\sqrt{d}}{a'+b'\sqrt{d}} \in \mathbf{Q}(\sqrt{d}),$$

autrement dit que $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$ est stable par divisions.

§6. Suite de Fibonacci

77 On rappelle la définition des nombres de Fibonacci : $\mathrm{F}_0 = 0$, $\mathrm{F}_1 = 1$, puis $\mathrm{F}_{n+2} = \mathrm{F}_{n+1} + \mathrm{F}_n$ pour tout indice n. Sans calculatrice, donner les valeurs de F_n pour n allant de 0 à 20.

78 Si l'on applique la formule de récurrence « à l'envers », quelle serait la valeur de F_n pour n allant de -1 à -10 ?

79 Démontrer qu'il n'y a jamais deux termes pairs consécutifs dans la suite de Fibonacci.

80

a) Écrire un programme qui permet de calculer F_{1000}.

b) Combien a-t-il de chiffres ?

c) Quels sont les dix derniers ?

81 Émettre une conjecture sur les nombres de Fibonacci qui se terminent par 5, puis sur ceux qui se terminent par 0.

82 Démontrer que pour tout indice n on a $\mathrm{F}_{n+1} \leqslant 2 \times \mathrm{F}_n$. Peut-on changer l'inégalité large en inégalité stricte ?

83 Démontrer que pour tout indice $n \geqslant 4$ on a $\mathrm{F}_{n+1} > 1{,}5 \times \mathrm{F}_n$. Indication : il y a un lien avec l'exercice précédent.

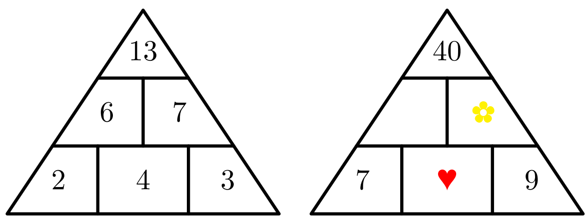
84 Démontrer que pour tout entier $n \in \mathbf{N}$ on a

$$\mathrm{F}_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \times \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right).$$

85 Démontrer que la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ de terme général $u_n = \mathrm{F}_{n+1}/\mathrm{F}_n$ est convergente. Et que sa limite est un nombre compris dans l'intervalle $]1\,;2[$.

§7. Triangle de Pascal

86 Voici un exercice trouvé sur Internet, et apparemment donné dans les « petites » classes.



Que vaut ♥ + ✿ ?

87 Construire (à la main) le triangle de Pascal jusqu'à la ligne $n = 10$. C'est un exercice idiot, mais il est essentiel de savoir faire, et rapidement.

88 Sans calculatrice et sans s'aider du triangle de Pascal, calculer :

a) $\binom{4}{2}$, **b)** $\binom{5}{3}$, **c)** $\binom{6}{4}$, **d)** $\binom{10}{3}$,

e) $\binom{11}{4}$, **f)** $\binom{12}{10}$, **g)** $\binom{25}{5}$, **h)** $\binom{50}{2}$.

89 Écrire le programme `Binomial(n, k)`.

90 Plus généralement, écrire un programme qui étant donné $z \in \mathbf{C}$ et $k \in \mathbf{N}$ calcule et renvoie le coefficient binomial généralisé

$$\binom{z}{k} = \frac{z \times (z-1) \times \ldots \times (z-k+1)}{k!}.$$

91 Sur Internet on trouve la question suivante : « $(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2$, mais que vaut $(1+x)^\pi$? ». Voici une réponse. Pour un entier $n \geqslant 0$ donné, on considère la fonction

$$f_n(x) = 1 + \pi x + \ldots + \binom{\pi}{n} x^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{\pi}{k} x^k$$

avec le coefficient binomial généralisé (voir l'exercice précédent).

a) Écrire un programme qui étant donnés n et x calcule $f_n(x)$.

b) Comparer (par exemple) $f_5(0{,}2)$ et $(1+0{,}2)^\pi$.

92 Écrire les développements de :

a) $(x+1)^4$, **b)** $(2x-1)^4$,
c) $(x+1)^5$, **d)** $(x+3)^5$,
e) $(a-b)^6$, **f)** $(x+1/x)^7$.

93 Mettre $(\sqrt{2}-1)^7$ sous la forme $a + b\sqrt{2}$, avec $a, b \in \mathbf{Z}$.

94 Mettre $(2-\sqrt{3})^{10}$ sous la forme $a + b\sqrt{3}$, avec $a, b \in \mathbf{Z}$. Comparer ensuite la fraction $-a/b$ avec $\sqrt{3}$ et commenter.

95 Donner en fonction de n les expressions de :

a) $\binom{n}{0}$, **b)** $\binom{n}{1}$, **c)** $\binom{n}{2}$, **d)** $\binom{n}{n-1}$.

96 Soient n et k deux entiers naturels, avec $k \leqslant n$. Justifier que

$$\frac{n \times (n-1) \times \ldots \times (n-k+1)}{k \times (k-1) \times \ldots \times (k-k+1)} = \frac{n!}{k! \times (n-k)!}.$$

97 Les coefficients binomiaux étant définis par la formule de l'exercice précédent, démontrer la relation du triangle de Pascal

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

98 Écrire le programme qui construit le triangle de Pascal jusqu'à la ligne $n_{\max}$. Le résultat sera une liste de listes `T` telle que `T[`n`][`k`]` est le coefficient binomial « k parmi n ».

99 Quelle relation simple y a-t-il entre

$$\binom{n}{k} \quad \text{et} \quad \binom{n+1}{k+1} \ ?$$

100 Trouver une relation de récurrence entre

$$\binom{n}{k} \quad \text{et} \quad \binom{n}{k+1},$$

et en déduire un programme qui construit (directement) la ligne n du triangle de Pascal.

101 Démontrer que sur la ligne n du triangle de Pascal (pour $n \geqslant 1$) la somme des coefficients de rangs impairs est égale à la somme des coefficients de rangs pairs. Que vaut cette somme ?

102 Démontrer la formule

$$k \times \binom{n}{k} = n \times \binom{n-1}{k-1}.$$

103 Soit ℓ un entier strictement positif. On pose $m = \mathrm{F}_{2\ell}\mathrm{F}_{2\ell+1}$ et $j = \mathrm{F}_{2\ell-1}\mathrm{F}_{2\ell}$.

a) Démontrer que $\binom{m}{j-1} = \binom{m-1}{j}$.

b) En déduire qu'il existe une infinité de nombres apparaissant au moins six fois dans le triangle de Pascal (résultat obtenu en 1975 par David Singmaster).

104 Calculer les valeurs de

$$\binom{2n}{n} \quad \text{et} \quad \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$$

pour $n = 10$, $n = 15$, $n = 20$, $n = 25$ et $n = 30$. Puis calculer l'erreur relative commise lorsqu'on remplace le coefficient binomial par cette formule d'approximation. On rappelle que l'erreur relative est

$$\frac{|x_{\text{théorique}} - x_{\text{approchée}}|}{x_{\text{théorique}}}.$$

Commenter les résultats observés.