T

TALE GÉNÉRALE — *Exercices de mathématiques (expertes)*

FRACTIONS (2)

§1. Petites questions

§2. Fractions irréductibles

1 Démontrer que pour tout entier $n \in \mathbf{Z}$ la fraction

$$\frac{n}{3n+1}$$

est irréductible.

2 Démontrer que la fraction

$$\frac{n+2}{n^2+1}$$

est irréductible, sauf lorsque $n \equiv 3\ [5]$.

§3. Nombres rationnels (ou pas)

3 Démontrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

4 Le nombre

$$\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+2}$$

est-il rationnel ou irrationnel ? Justifier soigneusement la réponse.

§4. Fractions continues

5 Soit n un entier naturel. On considère

$$u_n = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{2}}}}$$

avec n barres de fractions.

a) Expliciter u_0, u_1, u_2 et u_3.

b) Justifier que $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{1+u_n}$.

c) En déduire que $u_{n+2} = \dfrac{3u_n+4}{2u_n+3}$.

d) Dresser le tableau des variations de

$$f(x) = \frac{3x+4}{2x+3}.$$

e) Montrer que la suite $(u_{2n})_{n\geqslant 0}$, formée par les termes de rangs pairs, est croissante.

f) Prouver qu'elle est majorée ; en déduire qu'elle converge et calculer sa limite.

g) Montrer que la suite $(u_{2n+1})_{n\geqslant 0}$, formée par les termes de rangs impairs, est décroissante.

h) Prouver qu'elle est minorée ; en déduire qu'elle converge et calculer sa limite.

i) Qu'en déduit-on sur la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$?