T^{ALE} GÉNÉRALE — *Exercices de mathématiques (expertes)*

FRACTIONS (1)

§1. Petites questions

§2. Calculs divers

1 Écrire sous la forme d'une fraction irréductible (on fera tous les calculs *à la main*) :

a) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{12}$, **b)** $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{15}$, **c)** $\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{28}$,

d) $\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{45}$, **e)** $\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{66}$, **f)** $\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{91}$.

2 Soient a et b deux entiers strictement positifs. Est-ce que la fraction

$$\frac{b+1}{ab}$$

est irréductible ? Faire le lien avec l'exercice précédent et commenter.

3 Parmi les deux quantités

$$\frac{10}{13}+\frac{13}{10} \quad \text{et} \quad \frac{9}{14}+\frac{14}{9},$$

laquelle est la plus grande ? Généraliser le problème à des fractions de la forme

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad \frac{a-k}{b+k}+\frac{b+k}{a-k},$$

avec a, b et k des entiers tels que $k < a \leqslant b$.

§3. Développements décimaux

4 Calculer la période du développement décimal de $1/7$. Puis ceux de $2/7$, $3/7$, $4/7$, $5/7$ et $6/7$. Qu'observe-t-on, et pourquoi ?

5 Trouver les cent plus petits nombres $p \geqslant 3$ tels que la période du développement décimal de $1/p$ est de longueur maximale, c'est-à-dire exactement $p-1$. Le plus petit est $p = 7$ avec

$$\frac{1}{7} = 0{,}142\,857\,\underline{142\,857}\ldots$$

et on commencera par rappeler pourquoi la longueur ne peut pas être plus grande que ça.

6 Mettons ensemble les deux exercices précédents : si on prend l'un des p trouvés, et qu'on regarde les périodes de $1/p$, $2/p$, $3/p$, etc., jusqu'à $(p-1)/p$, qu'observe-t-on, et pourquoi ?

7 J'ai rédigé cet exercice à partir de la vidéo de Ben Sparks ci-dessous.

`https://www.youtube.com/watch?v=IMY2_yzDm9I`

Pour $n \geqslant 1$, soit $c_n = 555\ldots5$ le nombre qui s'écrit avec n fois le chiffre cinq.

a) Décrire le développement décimal de $1/c_n$. On pourra commencer par réfléchir à celui de $5/c_n$.

b) Si l'on calcule $\sin(1/c_n)$ avec une calculatrice *en degrés*, que voit-on apparaître ? Expliquer.

§4. Décimales des nombres célèbres

8 Justifier que le programme ci-dessous donne l'écriture, tronquée à N chiffres après la virgule, de a/b. On utilisera ce programme dans tous les exercices de cette section (et en particulier on pourra commencer par le tester avec l'exercice qui suit immédiatement).

```
def Développement(a, b, N) :
    (e, f) = divmod(a, b)
    f = 10 ** N * f // b
    E = str(e) ; F = str(f)
    F = "0" * (N - len(F)) + F
    return E + "." + F
```

9 Tester le programme précédent avec 1/7, 1/13 et 355/113.

10 **Décimales de $\sqrt{2}$.**

a) Démontrer que $0 < 51 - 36 \times \sqrt{2} < 1/10$. En déduire que la suite de terme général $u_n = (51 - 36\sqrt{2})^n$ tend vers zéro.

b) Justifier que pour tout entier $n \in \mathbf{N}$ il existe $a_n, b_n \in \mathbf{N}$ tels que $u_n = a_n - b_n\sqrt{2}$. On prouvera en particulier la formule de récurrence

$$\begin{cases} a_{n+1} = 51a_n + 72b_n \\ b_{n+1} = 36a_n + 51b_n \end{cases}$$

c) Écrire un programme qui calcule le couple (a_n, b_n).

d) Justifier que $0 < a_\mathrm{N}/b_\mathrm{N} - \sqrt{2} < 10^{-\mathrm{N}}$.

e) En déduire un programme qui affiche les N premières décimales de $\sqrt{2}$. Tester.

f) Faire l'exercice suivant.

11

a) Écrire un programme qui étant donné un entier $b_{\max}$ dresse la liste de tous les $b \in \{1\,;\,2\,;\,\ldots\,;\,b_{\max}\}$ tels que $b \times \sqrt{2}$ est de la forme $\ldots, 9\ldots$.

b) Parmi tous les b trouvés, gardons celui pour lequel la partie fractionnaire de $b \times \sqrt{2}$ est la plus petite (c'est-à-dire la plus proche de 0,9). On note $a = 1 + \lfloor b \times \sqrt{2} \rfloor$. Justifier que $0 < a - b\sqrt{2} < 1/10$.

c) Expliquer d'où sortent le 36 et le 51 de l'exercice précédent.

12 Plus subtil : expliquer pourquoi, dans les deux exercices précédents, on souhaite avoir la partie fractionnaire de $b \times \sqrt{2}$ la plus proche de 0,9.

13 Après avoir étudier les trois exercices précédents, proposer des programmes qui affichent les N premières décimales de $\sqrt{3}$ et de $\sqrt{7}$.

14 **La méthode de Héron.**

On va écrire un programme capable d'afficher les N premières décimales de n'importe que $\sqrt{d}$, pour $d \in \mathbf{N}$.

(. . .)

15 Soient $a_n \in \mathbf{Z}$ et $b_n \in \mathbf{N} - \{0\}$ le numérateur et le dénominateur de la fraction irréductible égale à

$$\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}.$$

a) Justifier que $b_n = n!$.

b) Trouver une formule pour a_n et écrire un programme, n'utilisant que des `int` (donc pas des `fractions`), qui calcule ce a_n.

c) On admet que

$$\left| e - \frac{a_n}{b_n} \right| \leqslant \frac{3}{(n+1)!}.$$

En déduire un programme qui calcule les N premières décimales de e.