Jour 2

RACINES CARRÉES D'UN NOMBRE COMPLEXE

solutions

Question 1

Soit z une racine carrée de Z (ce qui veut dire que $z^2 = \mathrm{Z}$). Alors $(-z)^2 = (-1)^2 \times z^2 = 1 \times \mathrm{Z} = \mathrm{Z}$, donc $-z$ est aussi une racine carrée de Z. (Et, rappelons-le, elle est toujours différente de z, sauf lorsque $z = \mathrm{Z} = 0$).

Question 2

Soit Z un nombre complexe et soit z une racine carrée de z (peu importe qu'on l'écrive sous forme algébrique). De $z^2 = \mathrm{Z}$ on déduit que

$$\overline{z^2} = \overline{\mathrm{Z}}$$

puis de $\overline{z^2} = \overline{z}^2$ on conclut que $\overline{z}^2 = \overline{\mathrm{Z}}$, autrement dit que $\overline{z}$ est une racine carrée de $\overline{\mathrm{Z}}$.

Exercice A

a) D'abord on a

$$z^2 = (a + bi)^2 = a^2 + 2abi + (bi)^2 = a^2 + 2abi + b^2 \times (-1) = (a^2 - b^2) + (2ab)i.$$

En identifiant les parties réelle et imaginaires à celles de $\mathrm{Z} = -33 + 56i$ on déduit que $a^2 - b^2 = -33$ (les parties réelles sont égales) et $2ab = 56$ (les parties imaginaires sont égales).

b) D'après la **Question 2**, $\overline{z} = a - bi$ est une racine carrée de $\overline{\mathrm{Z}} = -33 - 56i$. En particulier

$$z^2 \times \overline{z}^2 = (-33 + 56i) \times (-33 - 56i)$$

c'est-à-dire

$$(z \times \overline{z})^2 = (-33)^2 - (56i)^2 \qquad \text{ou encore} \qquad (a^2 + b^2)^2 = 4\,225.$$

(Remarque : $z \times \overline{z} = (a + bi) \times (a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2$.) Mais puisque $a^2 + b^2$ est de toute évidence positif, on obtient $a^2 + b^2 = \sqrt{4\,225} = 65$.

c) En additionnant membre à membre les équations $a^2 - b^2 = -33$ et $a^2 + b^2 = 65$ on obtient $2 \times a^2 = 32$, c'est-à-dire $a^2 = 16$, et donc $a = \pm 4$. Ainsi, avec l'équation qu'on a laissé de côté, on trouve

$$2ab = 56 \qquad \Leftrightarrow \qquad ab = 28 \qquad \Leftrightarrow \qquad b = \frac{28}{a} \qquad \Leftrightarrow \qquad b = \frac{28}{\pm 4} = \pm 7.$$

Les solutions sont donc $(a, b) = (4, 7)$ ou $(a, b) = (-4, -7)$.

d) Et donc les racines carrées de $\mathrm{Z} = -33 + 56i$ sont donc $z = 4 + 7i$ et $z = -4 - 7i$ (et elles sont bien opposées).

Question 3

On refait pareil avec $\mathrm{Z} = -96 - 110i$. On cherche les racines carrées sous la forme $z = a + bi$; puisque $z^2 = (a^2 - b^2) + (2ab)i$ (ça n'a pas changé !) on obtient déjà les équations

$$a^2 - b^2 = -96 \qquad \text{et} \qquad 2ab = -110$$

en identifiant les parties réelles et imaginaires. Ensuite on calcule

$$z^2 \times \overline{z}^2 = (-96 - 110i) \times (-96 + 110i) \qquad \Leftrightarrow \qquad (a^2 + b^2)^2 = (-96)^2 - (110i)^2$$

qui donne $(a^2+b^2)^2 = 21\,316$ et donc $a^2+b^2 = \sqrt{21\,316} = 146$. Enfin, on ajoute membre à membre cette équation à la première pour obtenir

$$2\times a^2 = -96+146 \quad\Leftrightarrow\quad 2\times a^2 = 50 \quad\Leftrightarrow\quad a^2 = 25 \quad\Leftrightarrow\quad a = \pm 5,$$

puis

$$2ab = -110 \quad\Leftrightarrow\quad ab = -55 \quad\Leftrightarrow\quad b = \frac{-55}{a} \quad\Leftrightarrow\quad b = \frac{-55}{\pm 5} = \mp 11.$$

Les solutions sont donc $(a,b) = (5,-11)$ ou $(a,b) = (-5,11)$, c'est-à-dire que les racines carrées de Z sont $z = 5-11i$ et $z = -5+11i$.

Question 4

Soit $f(z) = z^2-(1+3i)z-(8-19i)$. Alors

$$\begin{aligned} f(4-i) &= (4-i)^2-(1+3i)(4-i)-(8-19i) \\ &= 4^2-8i+i^2-(4+12i-i-3i^2)-8+19i \\ &= 16-8i-1-4-12i+i-3-8+19i \\ &= 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f(-3+4i) &= (-3+4i)^2-(1+3i)(-3+4i)-(8-19i) \\ &= (-3)^2-24i+(4i)^2-(-3-9i+4i+12i^2)-8+19i \\ &= 9-24i-16+3+9i-4i+12-8+19i \\ &= 0. \end{aligned}$$

Exercice B

a) C'est une équation de la forme $az^2+bz+c=0$, avec $a=1$, $b=-(1+3i)=-1-3i$ et $c=-(8-19i)=-8+19i$. Ainsi le discriminant vaut

$$\Delta = b^2-4ac = (-1-3i)^2-4\times 1\times(-8+19i) = 1+6i-9+32-76i = 24-70i.$$

C'est le nombre qui apparaît dans la question suivante : on est rassuré.

b) On est reparti : on cherche les racines carrées de $24-70i$ sous la forme $z=a+bi$, ce qui donne déjà

$$z^2 = 24-70i \quad\Leftrightarrow\quad (a^2-b^2)+(2ab)i = 24-70i$$

donc $a^2-b^2=24$ et $2ab=-70$ en identifiant les parties réelles et imaginaires. Ensuite, puisque $\overline{z}=a-bi$ est une racine carrée de $\overline{Delta} = 24+70i$, on obtient

$$z^2\times\overline{z}^2 = (24-70i)(24+70i) \quad\Leftrightarrow\quad (a^2+b^2)^2 = 24^2+70^2 = 5\,476$$

donc $a^2+b^2 = \sqrt{5\,476} = 74$. Enfin en additionnant membre à membre les équations qui parlent de a^2-b^2 et a^2+b^2 on obtient

$$2\times a^2 = 98 \quad\Leftrightarrow\quad a^2 = 49 \quad\Leftrightarrow\quad a = \pm 7$$

et enfin

$$2ab = -70 \quad\Leftrightarrow\quad ab = -35 \quad\Leftrightarrow\quad b = \frac{-35}{a} \quad\Leftrightarrow\quad b = \frac{-35}{\pm 7} = \mp 5.$$

Les racines carrées de Δ sont donc $\delta = 7-5i$ et $-\delta = -7+5i$.

c) On applique maintenant les formules de résolution (en notant δ l'une des racines carrées de Δ) : on trouve

$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} = \frac{(1+3i)+(7-5i)}{2} = \frac{8-2i}{2} = 4-i$$

et

$$z_2 = \frac{-b-\delta}{2a} = \frac{(1+3i)-(7-5i)}{2} = \frac{-6+8i}{2} = -3+4i.$$

Et on a déjà vu, dans la **Question 4**, que ce sont bien des solutions de l'équation.