Tale G — mathématiques expertes — 2024/2025

CAHIER DE VACANCES

nouvel an

au menu (soixante minutes par jour) :

Jour 1

PUISSANCES ET CONGRUENCES

LISTE DE LECTURE
Queen,
Bohemian Rhapsody

Soit m un entier au moins égal à 2 et soit $x \in \mathbf{Z}$. On s'intéresse à la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ où u_n est le reste dans la division euclidienne de x^n par m.

Niveau 1

Question 1 — Expliciter totalement la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ lorsque $m = 2$. On distinguera le cas où x est pair et le cas où x est impair.

Question 2 — Expliciter totalement la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ lorsque $m = 3$. On distinguera trois cas, selon que $x \equiv 0$, $x \equiv 1$ et $x \equiv 2$ (modulo 3).

Niveau 2

Question 3 — On suppose que $u_n = u_{n'}$, pour deux indices n et n' avec $n < n'$. Démontrer qu'alors pour tout $k \in \mathbf{N}$ on a $u_{n+k} = u_{n'+k}$. On pourra procéder par récurrence sur k.

Question 4 — En remarquant que u_n est forcément un entier entre 0 et $m-1$, démontrer qu'il existe nécessairement deux entiers n et n', avec $n < n'$, tels que $u_n = u_{n'}$. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est périodique à partir d'un certain rang.

Exercice A

a) On suppose que x est inversible modulo m, c'est-à-dire qu'il existe un $y \in \{0\,;\,1\,;\,\ldots\,;\,m-1\}$ tel que $x \times y \equiv 1\ [m]$. Démontrer que l'un des termes u_0, u_1, u_2, etc., u_{m-1} est égal à ce y.

b) Expliciter totalement la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ lorsque $m = 7$ et $x = 2$.

c) Toujours sous les hypothèses de la première question, montrer que la suite revient toujours à la valeur u_1.

d) Donner un exemple de situation (c'est-à-dire m et x) où la suite ne revient jamais à la valeur u_1.

Niveau 3

Question 5 — Calculer (sans calculatrice !) le reste dans la division euclidienne de $5^{2\,024}$ par 14.

Question 6 — Trouver une condition nécessaire et suffisante sur les facteurs premiers de x pour que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ soit identiquement nulle à partir d'un certain rang.

RACINES CARRÉES D'UN NOMBRE COMPLEXE

LISTE DE LECTURE
Henri Dutilleux,
Symphonie n° 2 « Le Double »

Soit Z un nombre complexe. On dit que z est une racine carrée de Z lorsque $z^2 = \mathrm{Z}$.

Niveau 1

Question 1 — Démontrer que si z est une racine carrée de Z, alors $-z$ en est également une.

Question 2 — On suppose que $\mathrm{Z} = \mathrm{A} + \mathrm{B}i$ et que $z = a + bi$ en est une racine carrée. Démontrer que $\overline{z}$ est une racine carrée de $\overline{\mathrm{Z}}$.

Niveau 2

Exercice A — On cherche dans cet exercice une racine carrée de $\mathrm{Z} = -33 + 56i$ sous la forme $z = a + bi$.

a) Démontrer que $a^2 - b^2 = -33$ et que $2ab = 56$.

b) Démontrer que $a^2 + b^2 = 65$.

c) En déduire que $a = \pm 4$, puis la valeur correspondante de b.

d) Quelles sont les deux racines carrées de Z ?

Question 3 — Reprendre la technique de l'exercice précédent pour trouver les racines carrées de $\mathrm{Z} = -96 - 110i$.

Niveau 3

Question 4 — Soit $f(z) = z^2 - (1+3i)z - (8-19i)$ et soient $z_1 = 4 - i$ et $z_2 = -3 + 4i$. Calculer $f(z_1)$ et $f(z_2)$.

Exercice B — On considère l'équation du deuxième degré $z^2 - (1+3i)z - (8-19i) = 0$.

a) Identifier les coefficients a, b et c de cette équation, puis calculer $\Delta = b^2 - 4ac$.

b) En utilisant la méthode de la section précédente, trouver les deux racines carrées de $24 - 70i$.

c) Retrouver par les formules habituelles les deux solutions de cette équation. On comparera aux deux valeurs de la **Question 4**.

Jour 3

QUELQUES RACINES DE L'UNITÉ

LISTE DE LECTURE
Charlotte de Witte,
Sanctum — Fugato — Fourth dimension

On dit qu'un nombre complexe z est une racine n-ième de l'unité lorsque $z^n = 1$. L'unique racine 1-ième de l'unité est $z = 1$.

Niveau 1

Question 1 — Justifier que $z = 1$ est une racine n-ième de l'unité pour tout entier $n \geqslant 1$.

Question 2 — Résoudre l'équation $z^2 = 1$ et en déduire toutes les racines 2-ièmes de l'unité.

Question 3 — En remarquant que $z^2 + 1 = (z - i) \times (z + i)$, résoudre l'équation $z^4 = 1$ et en déduire toutes les racines 4-ièmes de l'unité.

Niveau 2

Exercice A — On cherche ici les racines 3-ièmes.

a) Développer $(z - 1) \times (z^2 + z + 1)$.

b) On rappelle que lorsque $\Delta < 0$, on a $(i\sqrt{-\Delta})^2 = \Delta$. Trouver les solutions imaginaires de $z^2 + z + 1 = 0$.

c) Résoudre l'équation $z^3 = 1$ et en déduire les trois racines 3-ièmes de l'unité.

Exercice B — On passe aux racines 6-ièmes.

a) Développer $(z + 1) \times (z^2 - z + 1)$.

b) Factoriser $z^6 - 1$ en produit de facteurs du premier degré. On pourra commencer par la troisième identité remarquable : $z^6 - 1 = (z^3)^2 - 1 = \ldots$.

c) Résoudre l'équation $z^6 = 1$ et en déduire toutes les racines 6-ièmes de l'unité.

Niveau 3

Exercice C — On passe aux racines 8-ièmes.

a) Développer $(z^2 + \sqrt{2}z + 1) \times (z^2 - \sqrt{2}z + 1)$.

b) Résoudre l'équation $z^8 = 1$ et en déduire toutes les racines 8-ièmes de l'unité.

Exercice D — Et on termine avec les racines 5-ièmes, c'est plus subtil. Soit

$$\omega = \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{4}\right) + \left(\frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}\right) i.$$

a) Calculer courageusement ω^2 et ω^3.

b) Vérifier que $\omega^3 = \overline{\omega^2}$.

c) En déduire que $\omega^5 = 1$.

d) Quelles sont les cinq racines 5-ièmes de l'unité ?

Jour 4

UN PROBLÈME D'URNE

LISTE DE LECTURE
Joseph Haydn,
Symphonie n° 39

Une urne contient n boules noires et b boules blanches. Elles sont indiscernables, on en pioche une puis, sans la remettre, on en pioche une deuxième. On considère les événements A : « les deux boules sont de la même couleur » et B : les deux boules sont de couleurs différentes ». Bien sûr pour que l'expérience puisse se dérouler, on suppose que $n + b \geqslant 2$.

Niveau 1

Question 1 — Quel relation y a-t-il entre les événements A et B ?

Question 2 — Par exemple à l'aide d'un arbre de probabilités, démontrer que

$$\mathbf{P}(\mathrm{B}) = \frac{2nb}{(n+b)(n+b-1)}.$$

Question 3 — Démontrer que $\mathbf{P}(\mathrm{A}) = \mathbf{P}(\mathrm{B})$ si et seulement si $n(n-1) + b(b-1) = 2nb$.

Niveau 2

Exercice A — On rappelle qui sont les *nombres triangulaires* : $\mathrm{T}_k = \dfrac{k(k+1)}{2}$, pour $k \in \mathbf{N}$.

a) Calculer T_0, T_1, T_2, T_3, etc., T_{10}.

b) Justifier que $\mathrm{T}_k = 1 + 2 + 3 + \ldots + k$.

c) Quelle relation de récurrence existe-t-il entre les T_k ?

d) Que vaut $\mathrm{T}_{k-1} + \mathrm{T}_k$?

Exercice B — Soit n un entier naturel. On considère $\delta(n) = \sqrt{8n+1}$.

a) Calculer $\delta(\mathrm{T}_k)$ et vérifier que c'est un entier impair.

b) Réciproquement, on suppose que $\delta(n)$ est un entier. Justifier qu'il est forcément impair.

c) On peut donc l'écrire sous la forme $\delta(n) = 2k + 1$ pour un certain $k \in \mathbf{N}$. Démontrer que $n = \mathrm{T}_k$.

Niveau 3

Question 4 — On revient au problème initial. On cherche une condition nécessaire et suffisante sur le nombre de boules de chaque couleur pour que A et B aient la même probabilité. Pour cela, on fixe n, et on voit b comme une inconnue. Démontrer que $\mathbf{P}(\mathrm{A}) = \mathbf{P}(\mathrm{B})$ si et seulement si b est solution de l'équation

$$b^2 - (2n+1)b + n(n-1) = 0.$$

Question 5 — Calculer le discriminant de cette équation.

Question 6 — En déduire que (n, b) est une solution du problème si et seulement si n est de la forme T_k avec $k \in \mathbf{N} - \{0\}$.

Question 7 — Que vaut alors b ?

Résumons : on a prouvé que A et B ont la même probabilité si et seulement si n et b sont deux termes consécutifs (non nuls) de la suite des nombres triangulaires.