Tale G — mathématiques expertes — 2024/2025

# CAHIER DE VACANCES

## *automne*

*au menu (soixante minutes par jour) :*

Jour 1

# PUISSANCES

LISTE DE LECTURE
*Vangelis,*
*Blade Runner*

On rappelle qu'une *puissance* est une quantité de la forme $a^b$ avec $a$ et $b$ des entiers au moins égaux à 2 (on dit alors, s'il y a un risque d'ambiguité, puissance « non triviale », par opposition aux puissances « triviales » que sont les $a^0 = 1$, $a^1 = a$ ou encore les $1^b = 1$).

La plus petite puissance est donc $4 = 2^2$, suivie par $8 = 2^3$ et $9 = 3^2$. Viennent ensuite $16 = 4^2$ (ou $2^4$), $25 = 5^2$ et $27 = 3^3$.

## Niveau 1

**Question 1** — Trouver toutes les puissances inférieures ou égale à 100.

**Question 2** — Trouver la plus petite puissance strictement supérieure à 1 000.

**Question 3** — Si un entier $x$ est à la fois une puissance de deux et une puissance de trois, est-ce une puissance de six ?

## Niveau 2

**Question 4** — Est-il possible qu'un nombre pair soit une puissance de 3 ?

**Question 5** — Trouver un nombre qui est à la fois un carré, un cube, et une puissance cinquième. Rappel : on veut des puissances non triviales, donc 0 et 1 ne sont pas acceptés.

**Exercice A** — Soit $x \geqslant 2$ un nombre qui est à la fois un carré et un cube. On peut donc écrire $x = a^2$ d'une part, et $x = b^3$ d'autre part, avec $a, b \in \mathbf{N} - \{0\,;\,1\}$.

**a)** On note $r$ la racine cubique (qui n'est pas forcément entière) de $a$. Que vaut $r^2$ ? Justifier la réponse.

**b)** Soit $p$ un nombre premier qui apparaît dans la décomposition de $x$. Justifier que $v_p(x) = 2 \times v_p(a)$ et en déduire que $v_p(x)$ est pair.

**c)** De même, démontrer que $v_p(x)$ est un multiple de trois.

**d)** En déduire que $v_p(x)$ est un multiple de six.

**e)** Démontrer finalement que $x$ est une puissance sixième.

**f)** Est-ce que $r$ est un nombre entier ?

## Niveau 3

Attrapons-les toutes. Avec un programme Python par exemple.

```
def Puissances(M) :
    B = [False] * (M + 1)
    d = 2 ; p = 4
    while p <= M :
        while p <= M :
            B[p] = True
            p *= d
        d += 1 ; p = d * d
    L = []
    for x in range(M + 1) :
        if B[x] :
            L.append(x)
    return L
```

**Question 6** — Que calcule le programme ci-dessus ?

**Question 7** — Écrire un programme qui cherche, parmi tous les nombres inférieurs ou égaux à M donné, toutes les puissances « consécutives » (c'est-à-dire qui diffèrent de 1). Par exemple il y a $8 = 2^3$ et $9 = 3^2$.

**Question 8** — Généraliser le programme précédent à un écart égal à $d$. Pour $d = 2$ on trouve par exemple $25 = 5^2$ et $27 = 3^3$.

**Question 9** — Sur la page Wikipédia des puissances (parfaites) on trouve les deux résultats suivants :

$$\sum_n \frac{1}{n} \simeq 0{,}874\,464\,368\ldots \qquad \text{et} \qquad \sum_n \frac{1}{n-1} = 1,$$

les deux sommes étant faites sur tous les nombres $n$ qui sont des puissances non triviales. Écrire des programmes Python pour vérifier ces affirmations.

Jour 2

# VALUATIONS $p$-ADIQUES

LISTE DE LECTURE
*Sofiane Pamart,*
*NOCHE*

Soit $p$ un nombre premier et soit $x$ un entier relatif. On appelle $v_p(x)$ le plus grand $k \in \mathbf{N}$ tel que $p^k$ divise $x$ (avec la convention $v_p(0) = +\infty$). Lorsque $x \neq 0$, c'est l'exposant de $p$ dans la décomposition de $x$ en produit de nombres premiers.

## Niveau 1

**Question 1** — Compléter le programme ci-dessous, qui calcule $v_p(x)$.

```
from numpy import inf as ∞
def Valuation(p, x) :
    if x == ... :
        return ...
    k = ...
    while x % p == 0 :
        k += ... ; x //= ...
    return ...
```

**Question 2** — Soit $x$ un entier strictement positif et soit $r \in \mathbf{N} - \{0\,;\,1\}$. On suppose que $\sqrt[r]{x}$ est un nombre entier. Démontrer que $v_p(x)$ est un multiple de $r$ pour tout nombre premier $p$.

**Exercice A** — Soient $x$ et $y$ deux entiers relatifs et soit $p$ un nombre premier.

**a)** Démontrer que $v_p(x+y) \geqslant \min(v_p(x), v_p(y))$.

**b)** Puis montrer que si $v_p(x) \neq v_p(y)$ l'inégalité ci-dessus est en fait une égalité.

**c)** Donner quelques exemples où l'on a $v_p(x+y) > \min(v_p(x), v_p(y))$.

## Niveau 2

On rappelle qu'on écrit $\lfloor t \rfloor$ pour désigner la partie entière du réel $t$ : c'est le plus grand nombre entier inférieur ou égal à $t$. On rappelle également que lorsque $a \in \mathbf{N}$ et $b \in \mathbf{N} - \{0\}$, le quotient dans la division euclidienne de $a$ par $b$ est égal à $\lfloor a/b \rfloor$.

**Question 3** — Soit $x$ un entier strictement positif et soit $p$ un nombre premier. On pose $u_n = \lfloor x/p^n \rfloor$. Démontrer que la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est décroissante, et égale à zéro à partir d'un certain rang.

**Question 4** — Avec les mêmes notations prouver que $v_p(x!) = \displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \left\lfloor \frac{x}{p^n} \right\rfloor$.

**Exercice B**

**a)** Justifier que pour tout $x \geqslant 1$ on a $v_2(x!) \geqslant v_5(x!)$.

**b)** En déduire que le nombre de zéros à la fin de $x!$ est égal à $v_5(x!)$.

**c)** À l'aide de la formule de la **Question 4**, écrire un programme qui calcule le nombre de zéro à la fin de $x!$.

**d)** Déterminer le nombre de zéros à la fin de $10^6!$.

---

## Niveau 3

---

**Question 5** — Soient $k$ et $k'$ deux entiers relatifs. On suppose que $k$ divise $k'$, et que $k'$ divise $k$. Démontrer que $k' = \pm k$.

**Exercice C** — Soient $x$ et $y$ deux entiers relatifs non nuls. On pose

$$\delta = \prod_p p^{\min(v_p(x), v_p(y))} \qquad \text{et} \qquad \mu = \prod_p p^{\max(v_p(x), v_p(y))},$$

le produit étant pris sur tous les nombres premiers $p$.

**a)** On rappelle que le PGCD de $x$ et $y$ est le plus grand nombre positif qui divise à la fois $x$ et $y$. Démontrer que $\delta$ divise $x$ et $y$, puis que $\mathrm{PGCD}(x, y)$ divise $\delta$.

**b)** En déduire que $\delta$ est le PGCD de $x$ et $y$.

**c)** On rappelle que le PPCM de $x$ et $y$ est le plus petit nombre positif qui est à la fois un multiple de $x$ et un multiple de $y$. Démontrer que que $\mu$ est à la fois un multiple de $x$ et un multiple de $y$, puis que $\mathrm{PPCM}(x, y)$ est un multiple de $\mu$.

**d)** En déduire que $\mu$ est le PPCM de $x$ et $y$.

**e)** Démontrer que $\mathrm{PGCD}(x, y) \times \mathrm{PPCM}(x, y) = |x \times y|$.

**f)** Cette formule est-elle encore vraie si $x$ et/ou $y$ est nul ?

**Question 6** — On rappelle l'algorithme des restes successifs d'Euclide, qui calcule le PGCD de $x$ et $y$ (pour $x, y \in \mathbf{Z}$).

```python
def PGCD(x, y) :
    x = abs(x) ; y = abs(y)
    while y > 0 :
        (x, y) = (y, x % y)
    return x
```

Écrire le programme `PPCM(x, y)`.

Jour 3

# SOMMES DE PUISSANCES

LISTE DE LECTURE
*Chvrches,*
*Love is dead*

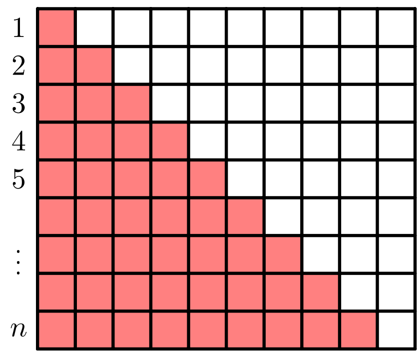
Soit $k$ un entier naturel. On définit

$$\mathrm{S}_k(n) = 1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k.$$

## Niveau 1

**Question 1** — Calculer $\mathrm{S}_0(n)$ pour tout entier $n \in \mathbf{N}$ (c'est-à-dire trouver la formule qui donne $\mathrm{S}_0(n)$ pour tout $n$).

**Question 2** — Interpréter $\mathrm{S}_1(n)$ à l'aide du dessin ci-dessous




et en déduire la formule qui donne $\mathrm{S}_1(n)$ en fonction de $n$.

## Niveau 2

**Question 3** — Écrire le programme qui calcule $\mathrm{S}_k(n)$.

**Exercice A** — On admet que $\mathrm{S}_2(n)$ s'exprime en fonction de $n$ sous la forme $an^3 + bn^2 + cn + d$ avec $a, b, c, d \in \mathbf{R}$.

- **a)** Que vaut $\mathrm{S}_2(0)$ ? En déduire la valeur de $d$.
- **b)** Que vaut $\mathrm{S}_2(1)$ ? En déduire que $a + b + c = 1$.
- **c)** Que vaut $\mathrm{S}_2(2)$ ? En déduire que $6a + 2b = 3$.
- **d)** Que vaut $\mathrm{S}_2(3)$ ? En déduire que $24a + 6b = 11$.
- **e)** Justifier que $6a = 2$.
- **f)** Déterminer $a$, $b$ et $c$.

## Niveau 3

**Exercice B** — Oublions la formule découverte dans l'exercice **A**, et voyons comment l'obtenir d'une autre manière.

**a)** Rappeler le développement de $(i+1)^3$.

**b)** Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a $\mathrm{S}_3(n+1) = 1^3 + (\mathrm{S}_0(n) + 3\mathrm{S}_1(n) + 3\mathrm{S}_2(n) + \mathrm{S}_3(n))$.

**c)** En déduire que

$$\mathrm{S}_2(n) = \frac{1}{3} \times \left((n+1)^3 - 1 - \mathrm{S}_0(n) - 3\mathrm{S}_1(n)\right).$$

**d)** Simplifier cette expression et retrouver la formule pour $\mathrm{S}_2(n)$.

**Exercice C** — La méthode de l'exercice précédent permet en fait de trouver, de proche en proche, les formules pour tous les $\mathrm{S}_k(n)$. Voyons par exemple pour $\mathrm{S}_3(n)$.

**a)** Rappeler le développement de $(i+1)^4$.

**b)** Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a $\mathrm{S}_4(n+1) = 1^4 + (\mathrm{S}_0(n) + 4\mathrm{S}_1(n) + 6\mathrm{S}_2(n) + 4\mathrm{S}_3(n) + \mathrm{S}_4(n))$.

**c)** En déduire que

$$\mathrm{S}_3(n) = \frac{1}{4} \times \left((n+1)^4 - 1 - \mathrm{S}_0(n) - 4\mathrm{S}_1(n) - 6\mathrm{S}_2(n)\right).$$

**d)** Simplifier cette expression, en remplaçant $\mathrm{S}_0(n)$, $\mathrm{S}_1(n)$ et $\mathrm{S}_2(n)$ par leurs formules.

**e)** Prouver que $\mathrm{S}_3(n) = \mathrm{S}_1(n)^2$.

Jour 4

# DÉVELOPPEMENTS DÉCIMAUX DES RATIONNELS

LISTE DE LECTURE
*Dmitri Chostakovitch,*
*Symphonie n° 5*

On rappelle qu'un nombre est *rationnel* s'il peut s'écrire sous la forme $a/b$, avec $a \in \mathbf{Z}$ et $b \in \mathbf{N} - \{0\}$. L'ensemble des nombres rationnels s'appelle $\mathbf{Q}$.

## Niveau 1

**Question 1** — Soit $\xi$ le nombre qui s'écrit $0{,}999\,999\,999\ldots$. Justifier que $\xi$ est solution de l'équation $10\xi - 9 = \xi$, et en déduire qu'il est en fait égal à… (à quoi tiens ?).

**Question 2** — Justifier que $0{,}001\,001\,001\ldots$ est égal à $1/999$ et en déduire l'écriture fractionnaire de $0{,}377\,377\,377\ldots$.

**Question 3** — Soit $x = 12{,}053\,773\,773\,77\ldots$. Quelle est l'écriture fractionnaire de $100x - 1\,205$ ? En déduire l'écriture fractionnaire de $x$.

## Niveau 2

**Question 4** — Poser la division $1/7$, et en déduire que l'écriture décimale de $1/7$ se répète tous les six chiffres.

**Question 5** — Plus généralement, justifier que lorsqu'on pose la division $a/b$, on voit apparaître une *période* (c'est-à-dire un bloc de chiffres qui se répète à l'infini) de longueur au plus $b$ dans le développement décimal. On pourra observer que les restes obtenus en cours de calculs sont tous compris entre $0$ et $b - 1$.

**Exercice A** — Réciproquement, soit $x$ un nombre dont l'écriture décimale contient une période. On note `E` la partie entière, `F` la partie décimale apériodique et `P` la période. Par exemple, pour $x = 12{,}053\,773\,773\,77\ldots$, on a `E = "12"`, `F = "05"` et `F = "377"`.

**a)** Justifier l'intérêt d'utiliser des chaînes de caractères plutôt que des nombres pour représenter `F` et `P`.

**b)** On pose $e =$ `int(E)`, $f =$ `int(F)`, $n_{\mathrm{F}} =$ `len(F)`, $p =$ `int(P)` et $n_{\mathrm{P}} =$ `len(P)`. Trouver une formule donnant $x$ à partir de $e$, $f$, $n_{\mathrm{F}}$, $p$ et $n_{\mathrm{P}}$.

**c)** En déduire le programme qui renvoie la fraction $a/b$, avec $a \in \mathbf{Z}$ et $b \in \mathbf{N} - \{0\}$, qui est égale à $x$.

```
from fractions import Fraction
def ÉcritureFractionnaire(E, F, P) :
    e = int(E)
    n_F = len(F) ; f = int(F)
    n_P = len(P) ; p = int(P)
    return ...
```

## Niveau 3

**Question 6** — Le programme ci-dessous, étant donnés $a$ et $b$, renvoie trois chaînes de caractères `E`, `F` et `P`, correspondant respectivement à la partie entière de $a/b$, à la partie apériodique du développement décimal, et à la période. Expliquer les lignes 10 et 11, ainsi que les lignes 14, 15, et 16.

```
1  def Développement(a, b) :
2      (e, r) = divmod(abs(a), b)
3      if a < 0 :
4          E = str(-e)
5      else :
6          E = str(e)
7      Restes = [None] * b ; n = 0 ; f = 0
8      while Restes[r] == None :
9          Restes[r] = n
10         (q, r) = divmod(10 * r, b)
11         f = 10 * f + q
12         n += 1
13     s = str(f)
14     s = "0" * (n - len(s)) + s
15     F = s[0 : Restes[r]]
16     P = s[Restes[r] : n]
17     return (E, F, P)
```

JOUR 5

# LA SUITE DE FIBONACCI ET L'ALGORITHME D'EUCLIDE

LISTE DE LECTURE
*Erasure*,
*Wonderland*

La *suite de Fibonacci* $(\mathrm{F}_n)_{n\geqslant 0}$ est définie par les premiers termes $\mathrm{F}_0 = 0$, $\mathrm{F}_1 = 1$ et la relation de récurrence $\mathrm{F}_{n+2} = \mathrm{F}_{n+1} + \mathrm{F}_n$.

## NIVEAU 1

**Question 1** — Calculer les termes jusqu'à $\mathrm{F}_{10}$.

**Question 2** — Démontrer que pour tout entier naturel $n$ on a $\mathrm{F}_{n+3} = 2 \times \mathrm{F}_{n+1} + \mathrm{F}_n$.

**Question 3** — En déduire, à l'aide d'un raisonnement par récurrence sur $k$, que

$$\begin{cases} \mathrm{F}_{3k+0} \equiv 0\ [2] & \text{lorsque } k \equiv 0\ [3], \\ \mathrm{F}_{3k+1} \equiv 1\ [2] & \text{lorsque } k \equiv 1\ [3], \\ \mathrm{F}_{3k+2} \equiv 1\ [2] & \text{lorsque } k \equiv 2\ [3]. \end{cases}$$

## NIVEAU 2

**Question 4** — Jusqu'à quelle valeur de $n$ peut-on calculer $\mathrm{F}_n$ avec le programme ci-dessous ?

```python
def Fibonacci(n) :
    if   n == 0 :
        return 0
    elif n == 1 :
        return 1
    else :
        return Fibonacci(n - 1) + Fibonacci(n - 2)
```

**Question 5** — Compléter le programme ci-dessous, bien plus efficace.

```python
def Fibonacci(n) :
    a = 0 ; b = 1
    for _ in range(n) :
        (a, b) = (..., ... + ...)
    return a
```

**Exercice A** — On considère l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.

**a)** Sans la résoudre, justifier qu'elle a deux solutions de signes contraires. On note $\varphi$ celle qui est positive, et $\psi$ celle qui est négative.

**b)** Calculer $\varphi$ et $\psi$ (c'est-à-dire résoudre l'équation, cette fois-ci).

**c)** Soient $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ les suites définies par $u_n = \varphi^n$ et $v_n = \psi^n$. Démontrer que ces deux suites vérifient la même relation de récurrence que la suite de Fibonacci.

**d)** Plus généralement, démontrer qu'une suite dont le terme général est de la forme $w_n = \mathrm{A} \times \varphi^n + \mathrm{B} \times \psi^n$ (avec A et B deux réels) satisfait la même relation de récurrence que la suite de Fibonacci.

**e)** Justifier que si $w_0 = \mathrm{F}_0$ et $w_1 = \mathrm{F}_1$, alors $w_n = \mathrm{F}_n$ pour tout indice $n$.

**f)** Trouver A et B tels que $\mathrm{A} + \mathrm{B} = 0$ et $\mathrm{A} \times \varphi + \mathrm{B} \times \psi = 1$.

**g)** En déduire la formule qui donne explicitement $\mathrm{F}_n$ en fonction de $n$ :

$$\mathrm{F}_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \times (\varphi^n - \psi^n).$$

## Niveau 3

Rappelons (une fois encore) l'algorithme des restes successifs d'Euclide.

```python
def PGCD(x, y) :
    x = abs(x) ; y = abs(y)
    while y > 0 :
        (x, y) = (y, x % y)
    return x
```

Dans cet algorithme, on remarque que la variable $y$ est diminuée d'au moins 1 à chaque itération de la boucle. Autrement dit, quelle que soit la valeur de $x$, la boucle effectue au plus $y$ itérations. Notons $c(y)$ le nombre maximal d'itérations effectuées (si l'on choisit la valeur de $x$ la plus défavorable pour le $y$ considéré).

**Question 6** — Calculer $c(0)$, $c(1)$ et $c(2)$.

**Question 7** — On considère la propriété $\mathscr{P}(n)$ : « si $x > y \geqslant 0$ et si $y < \mathrm{F}_{n+1}$, alors l'algorithme d'Euclide appliqué à $x$ et $y$ effectue au plus $n$ itérations ». Vérifier que $\mathscr{P}(0)$, $\mathscr{P}(1)$, et $\mathscr{P}(2)$ sont vraies.

**Question 8** — On fixe un entier $n \geqslant 2$ tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Soient $x$ et $y$, avec $x > y \geqslant 0$, pour lesquels l'algorithme d'Euclide effectue strictement plus de $n+1$ itérations. Justifier que `PGCD(y, x % y)` effectue strictement plus de $n$ itérations. En déduire que $x \,\%\, y \geqslant \mathrm{F}_{n+1}$, puis que $y \geqslant \mathrm{F}_{n+2}$, et enfin que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

**Question 9** — En déduire le *théorème de Lamé* : pour tout $n \geqslant 1$ et tous $x, y \in \mathbf{Z}$, si $|y| < \mathrm{F}_{n+1}$, alors $c(y) \leqslant n+1$.

## Jour 6
# LE CRIBLE D'ÉRATOSTHÈNE

LISTE DE LECTURE
*Wolfgang Amadeus Mozart,*
*Eine kleine Nachtmusik*

Voilà le crible d'Ératosthène, qui renvoie la liste, rangée dans l'ordre croissant, de tous les nombres premiers inférieurs ou égaux à M.

```
def Ératosthène(M) :
    B = [True] * (M + 1)
    B[0] = False ; B[1] = False
    d = 2 ; m = 4
    while m <= M :
        while m <= M :
            B[m] = False
            m += d
        d += 1 ; m = d * d
        while m <= M and not B[m] :
            d += 1 ; m = d * d
    P = []
    for x in range(0, M + 1) :
        if B[x] :
            P.append(x)
    return P
```

## Niveau 1

Le crible d'Ératosthène fonctionne en deux temps : dans le premier, il construit une liste `B` de booléens, initialement tous `True`, et place progressivement la valeur `False` dans toutes les cases dont l'indice *n'est pas* premier.

**Question 1** — *Pour une valeur $d$ fixée, quelles sont les valeurs prises par la variable $m$ ? Pourquoi démarre-t-on à $m = d \times d$ ?*

**Question 2** — *Expliquer le rôle du troisième* `while`.

**Question 3** — *Que fait la deuxième partie de l'algorithme (la boucle* `for`*) ?*

## Niveau 2

On note $\pi(x)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à $x$. C'est donc `len(Ératosthène(`$x$`))`. On a calculé ci-dessous quelques valeurs avec le programme précédent.

| $x$ | $10^2$ | $10^3$ | $10^4$ | $10^5$ | $10^6$ | $10^7$ | $10^8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\pi(x)$ | 25 | 168 | 1 229 | 9 592 | 78 498 | 664 579 | 5 761 455 |

**Question 4** — Comparer les valeurs de $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x) - 1}$ avec celles de $\pi(x)$.

**Question 5** — Reprendre la question précédente avec $\mathrm{li}(x) = 1{,}045\,163\,780\,117\,492\,784\,84\ldots + \displaystyle\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}$.

```python
from numpy import log as ln
from scipy.integrate import quad
LI_2 = 1.04516378011749278484
def li(x) :
        def itgr(t) :
            return 1 / ln(t)
    return LI_2 + quad(itgr, 2, x)[0]
```

## Niveau 3

Pour finir ce cahier on va s'intéresser à trois propriétés célèbres.

**Exercice A** — On dit que deux nombres premiers sont *jumeaux* lorsque leur différence est égale à 2. Par exemple (3, 5), (5, 7) et (11, 13). On pense qu'il y en a une infinité, mais pour l'instant personne n'a réussi à le démontrer.

**a)** Est-il possible que $p$, $p + 2$ et $p + 4$ soient tous les trois des nombres premiers ?

**b)** Écrire le programme `Jumeaux(M)` qui renvoie la liste de tous les couples de nombres premiers jumeaux inférieurs ou égaux à M.

**Exercice B**

**a)** Parmi les nombres premiers inférieurs ou égaux à $10^6$, calculer la fréquence de ceux qui se terminent par 0, par 1, par 2, par 3, etc., par 9. Qu'observe-t-on ?

**b)** Soit $r$ un entier strictement positif. On rappelle que $\varphi(r)$ est le nombre de nombres $x$ entre 0 et $r - 1$ tels que $\mathrm{PGCD}(x, r) = 1$. Que vaut $\varphi(10)$, et quels sont les $x$ tels que $\mathrm{PGCD}(x, 10) = 1$ ?

**c)** Écrire un programme `ProgressionArithmétique(M, a, r)` qui renvoie la fréquence, parmi les nombres premiers inférieurs ou égaux à M, de ceux qui sont congrus à $a$ modulo $r$.

Le *théorème de progression arithmétique*, de Dirichlet (pour la version qualitative) et La Vallée Poussin (pour la version quantitative), s'énonce ainsi : lorsque $\mathrm{PGCD}(a, r) = 1$, la fréquence, parmi les nombres premiers inférieurs ou égaux à M, de ceux qui sont congrus à $a$ modulo $r$, tend vers $1/\varphi(r)$. Lorsque $\mathrm{PGCD}(a, r) \neq 1$, cette fréquence tend vers zéro.

**d)** Vérifier ce théorème sur quelques exemples.

**Question 6** — Et on termine avec la *conjecture de Goldbach*, qui n'est à ce jour toujours pas démontrée : tout entier pair au moins égal à 6 peut s'écrire comme la somme de deux nombres premiers (impairs). On suppose avoir calculé et rangé dans une liste (croissante) `P` les nombres premiers jusqu'à M. Écrire le programme `Goldbach(P, x)` qui étant donné $x$ pair entre 6 et M calcule et renvoie deux nombres premiers $p$ et $q$ tels que $p + q = x$.