STS 2 — MATHÉMATIQUES — 2024/2025

CAHIER DE VACANCES

automne

au menu (quarante-cinq minutes par jour) :

Jour 1

SOMMES DE DEUX EXPONENTIELLES

LISTE DE LECTURE
Black Eyed Peas,
The E.N.D.

On considère dans cette fiche des fonctions de la forme $f(t) = \mathrm{A}e^{\alpha t} + \mathrm{B}e^{\beta t}$, où A, B, α et β sont des paramètres donnés.

Niveau 1

On s'intéresse dans cette première partie à la recherche des antécédents de zéro par une fonction de cette forme.

Question 1 — Si A et B sont tous les deux strictement positifs, que peut-on dire du signe de $f(t)$? Le nombre 0 a-t-il des antécédents par f ?

Question 2 — Et si A et B sont tous les deux strictement négatifs ?

On va donc supposer que A et B sont de signes contraires. On peut écrire

$$f(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{A}e^{\alpha t} + \mathrm{B}e^{\beta t} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{A}e^{\alpha t} = -\mathrm{B}e^{\beta t} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{e^{\alpha t}}{e^{\beta t}} = -\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}.$$

Question 3 — Justifier chaque étape du raisonnement ci-dessus.

Question 4 — Comment peut-on simplifier la fraction $e^{\alpha t}/e^{\beta t}$?

Question 5 — En déduire que lorsque A et B sont de signes contraires et que α et β sont distincts, l'équation $f(t) = 0$ possède exactement une solution, qui est

$$t = \frac{\ln(-\mathrm{B}/\mathrm{A})}{\alpha - \beta}.$$

Exercice A — Trouver les antécédents de zéro (lorsqu'il y en a) par les fonctions suivantes :

a) $f_1(t) = e^{2t} - e^{t}$, **b)** $f_2(t) = 2e^{2t} - e^{t}$, **c)** $f_3(t) = e^{3t} + e^{-t}$, **d)** $f_4(t) = e^{2t} - 3e^{-t}$.

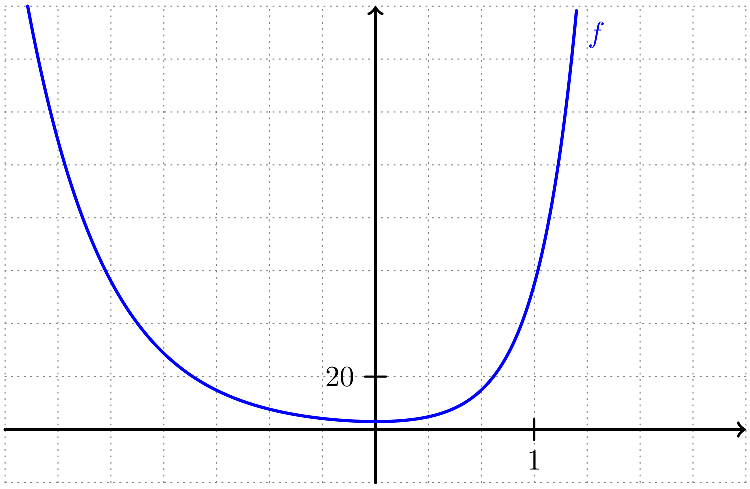
Niveau 2

On rappelle que pour une fonction de la forme $f(t) = \mathrm{A}e^{\alpha t}$, la dérivée est donnée par $f'(t) = \alpha \times \mathrm{A}e^{\alpha t}$.

Exercice B — Calculer les dérivéees des fonctions suivantes :

a) $f_1(t) = e^{2t}$, **b)** $f_2(t) = 2e^{3t}$, **c)** $f_3(t) = 3e^{-2t}$, **d)** $f_4(t) = e^{t} + e^{-t}$,
e) $f_5(t) = e^{2t} - 2e^{t}$, **f)** $f_6(t) = 2e^{-2t} - e^{-t}$, **g)** $f_7(t) = 2e^{-3t} - 3e^{2t}$, **h)** $f_8(t) = e^{t/2} + e^{-t/3}$.

Exercice C — On considère $f(t) = e^{4t}+2e^{-2t}$. On donne ci-dessous (une partie de) sa courbe représentative.



a) Justifier que $f'(t) = 4e^{4t} - 4e^{-4t}$.

b) Résoudre l'équation $f'(t) = 0$.

c) Vérifier (par exemple en développant) que $f'(t)$ est aussi égale à $4e^{4t} \times (1 - e^{-8t})$.

d) Justifier que $1 - e^{-8t} \geqslant 0$ est équivalent à $t \geqslant 0$.

e) En déduire le tableau des signes de $f'(t)$.

f) Dresser finalement le tableau des variations de f.

g) Quelle est la valeur minimale prise par f ?

Niveau 3

Question 5 — On suppose que A et B sont tous les deux strictement positifs, et que α et β sont du même signe. Quel est le sens de variation de $f(t)$? On justifiera (évidemment) la réponse.

Question 6 — Étudier les variations de $f(t) = e^{2t} - e^{-t}$. On donne ci-dessous (une partie de) sa courbe représentative.