NOMBRES DÉCIMAUX, NOMBRES RATIONNELS

1 Développements décimaux

Nous commençons cette leçon par une observation importante : certains nombres ont *deux* écritures différentes (ce sont ceux qui se « terminent » par une infinité de 9). Voyons cela avec le plus simple d'entre eux : $\xi = 0{,}999\,999\,999\ldots$. On a

$$10 \times \xi = 9{,}999\,999\,999\ldots = 9 + 0{,}999\,999\,999\ldots = 9 + \xi,$$

ce qui veut dire que ξ est solution de l'équation $10 \times \xi = 9 + \xi$. C'est une équation du premier degré, nous savons qu'elle n'a qu'*une seule* solution. Or quand on la résout on trouve

$$\begin{aligned} & 10 \times \xi = 9 + \xi \\ \overset{-\xi}{\Leftrightarrow} \quad & 9 \times \xi = 9 \\ \overset{\div 9}{\Leftrightarrow} \quad & \xi = 1. \end{aligned}$$

Donc $\xi = 1$, c'est-à-dire $1{,}000\,000\,000\ldots$ et $0{,}999\,999\,999\ldots$ sont *le même nombre.*

Propriété (les deux écritures de 1).
Le nombre 1 possède deux développements décimaux : $1 = 1{,}000\,000\,000\ldots$ et $0{,}999\,999\,999\ldots$.

Cette deuxième écriture est importante parce qu'elle donne les développements décimaux de plein de fractions (on obtient ces valeurs sans calculatrice, puisqu'il n'y a *pas de retenue*) :

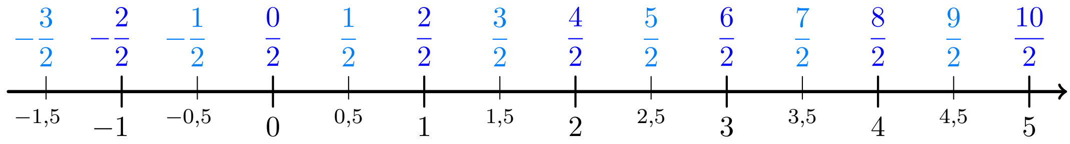
$$\begin{aligned} & 1 = 0{,}999\,999\ldots \\ \overset{\div 3}{\Leftrightarrow} \quad & \frac{1}{3} = 0{,}333\,333\ldots \end{aligned} \qquad \begin{aligned} & 1 = 0{,}999\,999\ldots \\ \overset{\div 9}{\Leftrightarrow} \quad & \frac{1}{9} = 0{,}111\,111\ldots \end{aligned} \qquad \begin{aligned} & 1 = 0{,}999\,999\ldots \\ \overset{\div 11}{\Leftrightarrow} \quad & \frac{1}{11} = 0{,}090\,909\ldots \end{aligned}$$

mais nous allons y revenir tout au long de cette leçon.

2 Passage en revue des petites fractions

Il faut impérativement connaître *toutes* les valeurs numériques ! On en a besoin sans arrêt, et ne pas reconnaître, dans un exercice, que $1{,}5 = 3/2$ ou que $0{,}333\ldots = 1/3$ pose de grandes difficultés. Il est également nécessaire de savoir *dans quelles situations* on rencontre les « petites fractions ». Voici les principaux exemples.

Les demis.

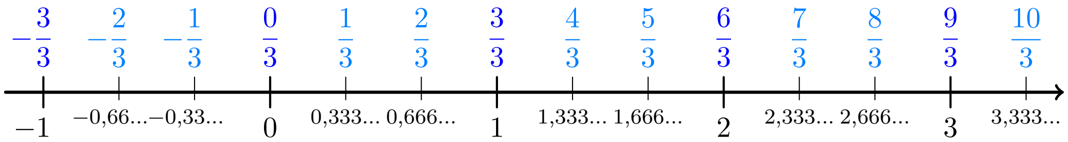


La fraction $n/2$ est un nombre entier si et seulement si n est pair, et si n est impair la valeur est « quelque chose virgule cinq ». Par exemple, pour $37/2$, on encadre 37 par deux nombres pairs, ici $36 \leqslant 37 < 38$, et puisque $36/2 = 18$ on obtient

$$\frac{37}{2} = \frac{36}{2} + \frac{1}{2} = 18 + 0{,}5 = 18{,}5.$$

Évidemment on fait tout ceci *de tête* : on n'écrit pas les étapes !

Les tiers.



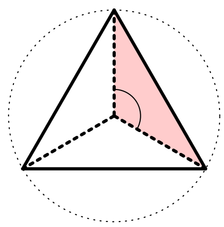
Pour trouver sans calculatrice la valeur numérique d'une fraction « sur trois », on cherche le plus grand multiple de 3 qui ne dépasse pas le numérateur : par exemple $40 = 39 + 1$ (puisque $39 = 3 \times 13$) donc

$$\frac{40}{3} = \frac{39}{3} + \frac{1}{3} = 13 + 0{,}333\,333\ldots = 13{,}333\,333\ldots.$$

Et encore une fois, on fait tout ceci *dans sa tête*, on n'écrit pas les étapes.

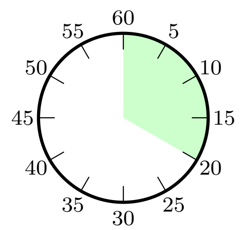
Les choses qui se divisent en trois.

un triangle équilatéral



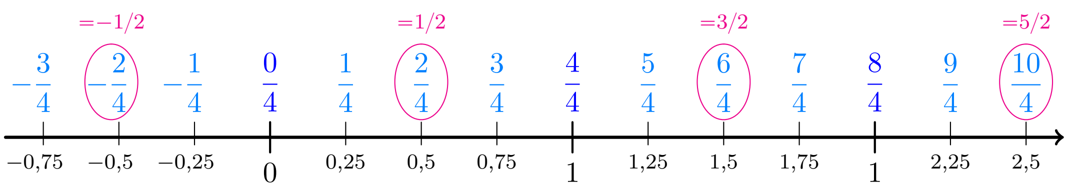
$$\frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$$

une heure ou une minute



$$\frac{1\,\text{h}}{3} = 20\,\text{min} \qquad \frac{1\,\text{min}}{3} = 20\,\text{s}$$

Les quarts.



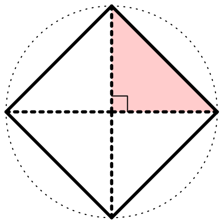
Toujours la même méthode pour évaluer mentalement une fraction « sur quatre » :

$$\frac{19}{4} = \frac{16}{4} + \frac{3}{4} = 4 + 0{,}75 = 4{,}75.$$

Alors évidemment, pour reconnaître $19 = 16 + 3$ avec $16 = 4 \times 4$, il vaut connaître les multiples de 4, donc les tables de multiplication. On en revient toujours là.

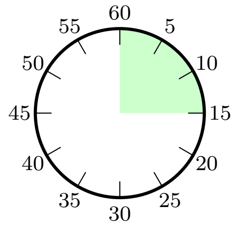
Les choses qui se divisent en quatre.

un carré



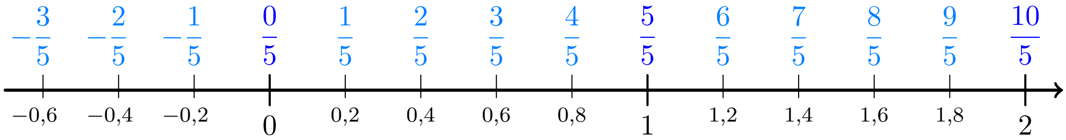
$$\frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$$

une heure ou une minute



$$\frac{1\,\text{h}}{4} = 15\,\text{min} \qquad \frac{1\,\text{min}}{4} = 15\,\text{s}$$

<u>*Les cinquièmes.*</u>

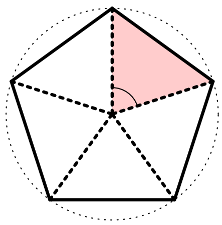


Voici un exemple de division par cinq (toujours la même méthode) :

$$\frac{67}{5} = \frac{65}{5} + \frac{2}{5} = 13 + 0{,}4 = 13{,}4.$$

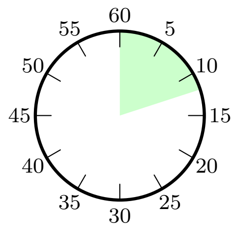
Les choses qui se divisent en cinq.

un pentagone régulier



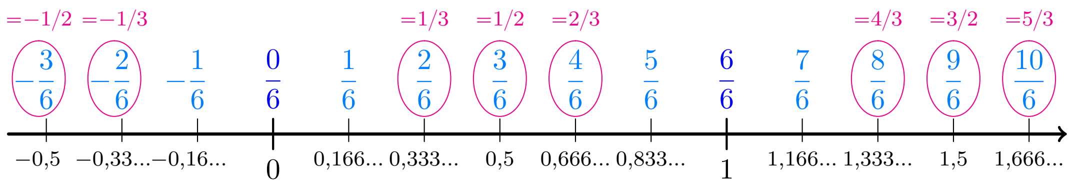
$$\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$$

une heure ou une minute



$$\frac{1\,\text{h}}{5} = 12\,\text{min} \qquad \frac{1\,\text{min}}{5} = 12\,\text{s}$$

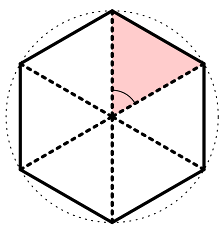
<u>*Les sixièmes.*</u>



Ici on retiendra les pourcentages, qui apparaissent dans les exercices de probabilités avec des dés : $1/6 = 0{,}166\,6\ldots \simeq 16{,}66\,\%$.

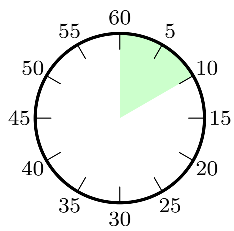
Les choses qui se divisent en six.

un hexagone régulier



$$\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$$

une heure ou une minute



$$\frac{1\,\text{h}}{6} = 10\,\text{min} \qquad \frac{1\,\text{min}}{6} = 10\,\text{s}$$

Les septièmes (parce que c'est rigolo).

Observons ce qu'il arrive lorsqu'on divise un entier par 7. On pose la division, pour les multiples de 7 elle tombe juste. Pour les autres, il reste 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 et donc (après avoir écrit la virgule) on « abaisse un zéro » et on continue. Voici tous les cas.

reste	avec le zéro	quotient (décimale suivante)	reste suivant
1	$10 = 7 \times 1 + 3$	1	3
2	$20 = 7 \times 2 + 6$	2	6
3	$30 = 7 \times 4 + 2$	4	2
4	$40 = 7 \times 5 + 5$	5	5
5	$50 = 7 \times 7 + 1$	7	1
6	$60 = 7 \times 8 + 4$	8	4

On voit qu'on tourne en boucle : les restes arrivent *toujours* dans le même ordre $1 \to 3 \to 2 \to 6 \to 4 \to 5 \to 1 \to \dots$ et donc les décimales elles aussi se répètent toujours dans le même ordre

$$1 \longrightarrow 4 \longrightarrow 2 \longrightarrow 8 \longrightarrow 5 \longrightarrow 7 \longrightarrow 1 \longrightarrow 4 \longrightarrow \dots$$

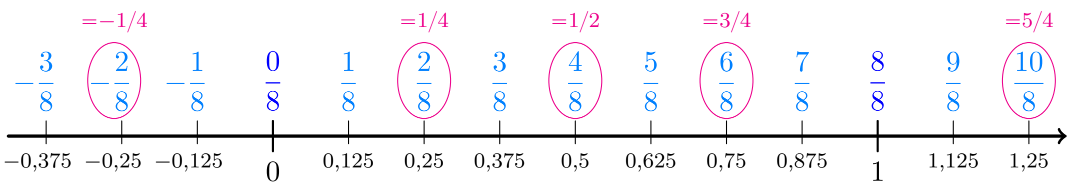
et ce *quel que soit le nombre qu'on a divisé par* 7. Il y a six divisions qui donnent un résultat dans $]0\,;1[$: 1/7, 2/7, 3/7, 4/7, 5/7 et 6/7. Et avec la succession de décimales ci-dessus, on peut également former six nombres :

$$0{,}142\,857\,1\dots \quad 0{,}428\,571\,4\dots \quad 0{,}285\,714\,2\dots \quad 0{,}857\,142\,8\dots \quad 0{,}571\,428\,5\dots \quad 0{,}714\,285\,7\dots.$$

Il ne reste plus qu'à les ranger dans l'ordre croissant pour savoir à quelle fraction ils correspondent.

$$\underbrace{0{,}142\,857\,1\dots}_{=\frac{1}{7}} \quad \underbrace{0{,}285\,714\,2\dots}_{=\frac{2}{7}} \quad \underbrace{0{,}428\,571\,4\dots}_{=\frac{3}{7}} \quad \underbrace{0{,}571\,428\,5\dots}_{=\frac{4}{7}} \quad \underbrace{0{,}714\,285\,7\dots}_{=\frac{5}{7}} \quad \underbrace{0{,}857\,142\,8\dots}_{=\frac{6}{7}}$$

Les huitièmes.

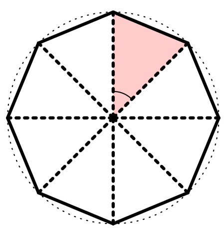


Un exemple de division par huit (encore et toujours la même méthode) :

$$\frac{45}{8} = \frac{40}{8} + \frac{5}{8} = 5 + 0{,}625 = 5{,}625.$$

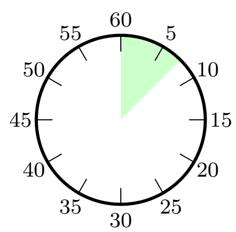
Les choses qui se divisent en huit.

un octogone régulier



$$\frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$$

une heure ou une minute



$$\frac{1\,\text{h}}{8} = 7\,\text{min}\ 30\,\text{s} \qquad \frac{1\,\text{min}}{8} = 7{,}5\,\text{s}$$

Les neuvièmes et leurs cousins.

Nous nous intéressons ici aux nombres qui ne s'écrivent qu'avec le chiffre 9. La seule chose à comprendre est (le nombre k désigne le nombre de 9, dans cet exemple $k = 5$) :

$$1 = 0{,}\underbrace{99999}_{k}\underbrace{99999}_{k}\underbrace{99999}_{k}\underbrace{99999}_{k}\ldots = \underbrace{99\,999}_{k} \times 0{,}\underbrace{00001}_{k}\underbrace{00001}_{k}\underbrace{00001}_{k}\underbrace{00001}_{k}\ldots$$

ce qui, en divisant chaque membre par $\underbrace{99\,999}_{k}$, donne

$$\frac{1}{\underbrace{99\,999}_{k}} = 0{,}\underbrace{00001}_{k}\underbrace{00001}_{k}\underbrace{00001}_{k}\underbrace{00001}_{k}\ldots.$$

On retiendra en particulier le cas $k = 1$, c'est-à-dire

$$\frac{1}{9} = 0{,}111\,111\,111\,111\,111\ldots.$$

Les dixièmes et leurs puissances.

Nous avons déjà tout dit par le passé, mais revoyons la *règle de la virgule* avec les fractions : quand on multiplie des dixièmes par des dixièmes, on obtient des centièmes

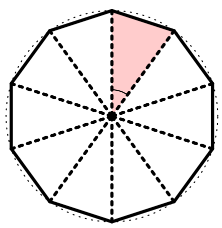
$$\frac{45}{10} \times \frac{31}{10} = \frac{45 \times 31}{100}$$

donc il faudra placer la virgule en laissant *deux* chiffres (parce que $1/100 = 0{,}01$) à la fin de 45×31. Maintenant un peu de calcul mental :

$$4{,}5 \times 3{,}1 = \frac{45}{10} \times \frac{31}{10} = \frac{45 \times 31}{100} = \frac{45 \times 30 + 45}{100} = \frac{1350 + 45}{100} = \frac{1395}{100} = 13{,}95.$$

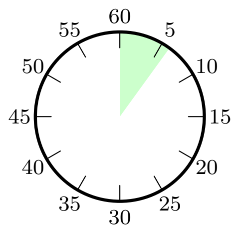
Les choses qui se divisent en dix.

un décagone régulier



$$\frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$$

une heure ou une minute



$$\frac{1\,\mathrm{h}}{10} = 6\,\mathrm{min} \qquad \frac{1\,\mathrm{min}}{10} = 6\,\mathrm{s}$$

Les onzièmes et leurs cousins.

Ici on considère les nombres *répunitaires*, c'est-à-dire qui ne s'écrivent qu'avec des 1. Ils sont liés aux nombres qui ne s'écrivent qu'avec des 9, puisque

$$\underbrace{11\,111\,111\,111}_{k} = \frac{\overbrace{99\,999\,999\,999}^{k}}{9} = \frac{\overbrace{100\,000\,000\,000}^{k \text{ zéros}} - 1}{9} = \frac{10^k - 1}{9}.$$

Au passage, à partir du nombre qui n'a que des 1, on peut fabriquer, par exemple, celui qui n'a que des 4, ou celui qui n'a que des 8, etc. :

$$\underbrace{44\,444\,444\,444}_{k} = 4 \times \underbrace{11\,111\,111\,111}_{k} = 4 \times \frac{10^k - 1}{9} \quad \text{ou} \quad \underbrace{88\,888\,888\,888}_{k} = 8 \times \underbrace{11\,111\,111\,111}_{k} = 8 \times \frac{10^k - 1}{9}.$$

Venons-en au développement décimal. Nous connaissons déjà la méthode :

$$1 = 0{,}\underbrace{999\,999}_{k}\underbrace{999\,999}_{k}\underbrace{999\,999}_{k}\underbrace{999\,999}_{k}\ldots = \underbrace{11\,111}_{k} \times 0{,}\underbrace{000\,090}_{k}\underbrace{000\,900}_{k}\underbrace{009\,000}_{k}\underbrace{090\,000}_{k}\ldots$$

ce qui, en divisant chaque membre par $\underbrace{11\,111}_{k}$, donne

$$\frac{1}{\underbrace{11\,111}_{k}} = 0{,}\underbrace{000\,090}_{k}\underbrace{000\,900}_{k}\underbrace{009\,000}_{k}\underbrace{090\,000}_{k}\ldots.$$

Les douzièmes.

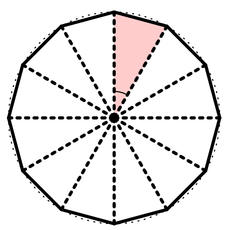
Pour $1/12$ c'est un peu plus compliqué de trouver le développement décimal. On peut par exemple remarquer que

$$\frac{1_{\times 5}}{12_{\times 5}} = \frac{5}{60} = \frac{5}{6} \times \frac{1}{10} = \frac{5}{6} \div 10 = 0{,}833\,333\ldots \div 10 = 0{,}083\,333\ldots.$$

Cependant les divisions par 12 qui nous intéressent sont celles qui tombent justes. Et il y en a beaucoup, parce qu'il y a très longtemps, en Mésopotamie, on comptait en faisant des paquets de 60 et non des paquets de 10 comme aujourd'hui.

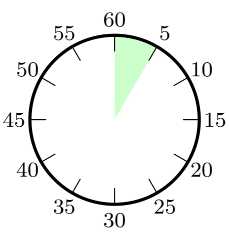
Les choses qui se divisent en douze.

un dodécagone régulier



$$\frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$$

une heure ou une minute



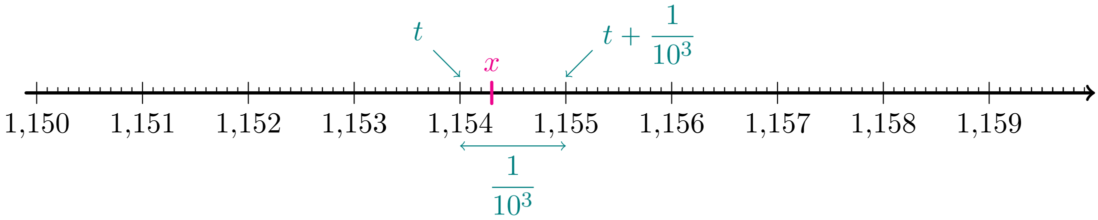
$$\frac{1\,\mathrm{h}}{12} = 5\,\mathrm{min} \qquad \frac{1\,\mathrm{min}}{12} = 5\,\mathrm{s}$$

3 Développement décimal d'un nombre

D'abord rappelons la signification du développement décimal : le chiffre en première position *après* la virgule indique le *nombre de dixièmes*, le chiffre en deuxième position indique le *nombre de centièmes*, celui en troisième position est le *nombre de millièmes*, etc., ainsi

$$3{,}141\,592\,65\ldots = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1\,000} + \frac{5}{10\,000} + \frac{9}{100\,000} + \frac{2}{1\,000\,000} + \frac{6}{10\,000\,000} + \frac{5}{100\,000\,000} + \ldots.$$

Lorsque le développement décimal est infini, ou trop long à écrire, on utilise une *troncature*. Soit $n \in \mathbf{N}$ le nombre de chiffres désiré. Pour obtenir la troncature de x (qu'on supposera *positif* pour simplifier) « à n chiffres après la virgule », on place x sur une droite graduée avec l'échelle $1/10^n$.



La troncature est alors le nombre correspondant à la graduation immédiatement *à gauche* de x. Soit t la valeur de cette troncature : la graduation suivante est donc $t + 1/10^n$, ce qui veut dire qu'on a l'encadrement

$$t \leqslant x < t + \frac{1}{10^n}.$$

Propriété (troncatures).
La troncature à n chiffres après la virgule du nombre $x \in \mathbf{R}_+$ s'obtient avec la formule

$$t = \frac{\lfloor 10^n \times x \rfloor}{10^n}.$$

Preuve. On reprend les notations précédentes :

$$t \leqslant x < t + \frac{1}{10^n} \overset{\times 10^n}{\Leftrightarrow} 10^n \times t \leqslant 10^n \times x < 10^n \times t + 1.$$

On reconnaît la caractérisation de la partie entière : $\lfloor \mathrm{X} \rfloor \leqslant \mathrm{X} < \lfloor \mathrm{X} \rfloor + 1$ (avec ici $\mathrm{X} = 10^n \times x$). Ainsi

$$10^n \times t = \lfloor 10^n \times x \rfloor \quad \text{c'est-à-dire} \quad t = \frac{\lfloor 10^n \times x \rfloor}{10^n}.$$

C.Q.F.D.

Voyons un exemple, avec $x = 1{,}414\,213\,562\ldots$. On a

$$\begin{aligned}
\text{pour } n = 1 : \quad & \frac{\lfloor 10^1 \times 1{,}414\,213\,562\ldots \rfloor}{10^1} = \frac{\lfloor 14{,}142\,135\,62\ldots \rfloor}{10^1} = \frac{14}{10^1} = 1{,}\underbrace{4}_{\text{1 chiffre}} \\
\text{pour } n = 3 : \quad & \frac{\lfloor 10^3 \times 1{,}414\,213\,562\ldots \rfloor}{10^3} = \frac{\lfloor 1\,414{,}213\,562\ldots \rfloor}{10^3} = \frac{1\,414}{10^3} = 1{,}\underbrace{414}_{\text{3 chiffres}} \\
\text{pour } n = 7 : \quad & \frac{\lfloor 10^7 \times 1{,}414\,213\,562\ldots \rfloor}{10^7} = \frac{\lfloor 14\,142\,135{,}62\ldots \rfloor}{10^7} = \frac{14\,142\,135}{10^7} = 1{,}\underbrace{414\,213\,5}_{\text{7 chiffres}}.
\end{aligned}$$

Voyons le programme qui calcule (et affiche !) cette troncature lorsque x est une fraction d'entiers, disons $x = a/b$. On doit calculer

$$\mathrm{X} = \left\lfloor 10^n \times \frac{a}{b} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{10^n \times a}{b} \right\rfloor$$

Nous savons que la *partie entière* d'une fraction est le quotient dans la division euclidienne : on l'obtient avec l'opérateur `//`. Ensuite on doit diviser par 10^n pour « placer la virgule » au bon endroit. Python ne manipule pas plus de seize chiffres pour les nombres à virgule : pour en avoir plus, nous allons ruser un peu : on effectue la division euclidienne du X ci-dessus par 10^n (ce que fait la commande `divmod`). Le quotient correspond aux chiffres « avant la virgule », et le reste correspond aux chiffres « après la virgule ». Comme ce sont pour l'instant des *entiers*, on n'a pas la limitation à seize chiffres.

La ruse est la suivante : on convertit ces entiers en chaînes de caractères, et on imprime ces deux chaînes avec un `"."` entre les deux pour représenter le *séparateur décimal* (c'est-à-dire « la virgule »). Reste une subtilité à gérer : si les chiffres « après la virgule » commencent par des zéros, il faut les ajouter dans la chaîne de caractères, juste après le `"."`. Par exemple pour $x = 1/13$ et $n = 4$ on a

$$\mathrm{X} = \left\lfloor \frac{10^4 \times 1}{13} \right\rfloor = 769.$$

On fait la division euclidienne par 10^4 : on obtient un quotient $e = 0$ et un reste $f = 769$ (car $769 = 10^4 \times 0 + 769$ évidemment). Mais 769 n'a que trois chiffres, alors qu'on en demande $n = 4$ (on aurait aimé que « $f = 0\,769$ » mais ça ne marche pas ainsi). Puisque $4 - 3 = 1$, il faut ajouter 1 zéro, et donc $1/13 \simeq 0{,}076\,9$.

Voici le programme : `str` est la commande qui transforme un entier en chaîne de caractères, et `len` est la commande qui donne le nombre de caractères dans une chaîne. Le `+` entre deux chaînes permet de les mettre « bout à bout » et le `*` permet de répéter un caractère (ici `"0"`) plusieurs fois.

```
from fractions import Fraction
def DéveloppementDécimal(x, n) :
    X = 10 ** n * x.numerator // x.denominator
    (e, f) = divmod(X, 10 ** n)
    E = str(e) ; F = str(f)
    print(E + "." + "0" * (n - len(F)) + F)
```

```
>>> DéveloppementDécimal(Fraction(157, 83), 50)
1.89156626506024096385542168674698795180722891566265
```

Si on utilise l'opérateur / des nombres à virgule, on est (comme nous l'avons dit) limité à seize chiffres, donc impossible de faire une troncature à cinquante chiffres !

```
>>> 157 / 83
1.891566265060241
```

4 Nombres décimaux

Définition (nombres décimaux).

i) On dit qu'un nombre est *décimal* lorsqu'il admet au moins un développement décimal n'ayant qu'un nombre *fini* de chiffres après la virgule.

ii) L'ensemble des nombres décimaux s'appelle $\mathbf{D}$.

Il est faux de dire : « un nombre qui a une infinité de chiffres après la virgule n'est pas décimal ». En effet, 0,999 999 . . . a une infinité de chiffres après la virgule, et pourtant il est décimal (parce qu'il est égal à 1). Pour qu'un nombre soit décimal, il suffit donc qu'il ait *au moins une* écriture avec un nombre fini de chiffres.

Les nombres décimaux sont des cas particuliers de nombres réels, ce qu'on écrit $\mathbf{D} \subseteq \mathbf{R}$, mais il y a des nombres réels qui ne sont pas décimaux : voici comment les reconnaître.

Propriété (caractérisation des nombres décimaux).

Un nombre est décimal si et seulement si on peut l'écrire comme une fraction (d'entiers) dont le dénominateur est une puissance de dix, c'est-à-dire sous la forme

$$\frac{n}{10^r}$$

avec $n \in \mathbf{Z}$ et $r \in \mathbf{N}$.

Preuve. C'est un « si et seulement si », il s'agit donc de prouver *deux implications.*

Implication directe (si un nombre est décimal, alors on peut l'écrire $n/10^r$) : prenons x un nombre décimal. Il admet donc une écriture avec un nombre *fini* de chiffres après la virgule. Soit r le nombre de chiffres après la virgule : par décalage, $10^r \times x$ est donc un nombre *entier*. Posons $n = 10^r \times x$. Alors $n \in \mathbf{Z}$, $r \in \mathbf{N}$, et on a $x = n/10^r$, c'est l'écriture voulue.

Implication réciproque (si un nombre s'écrit $n/10^r$, alors il est décimal). Soit $n \in \mathbf{Z}$, soit $r \in \mathbf{N}$, et soit $x = n/10^r$. Puisque n est entier, en le divisant par 10^r, on décale la virgule de n positions. Ainsi $x = n/10^r$ a une écriture décimale avec n chiffres après la virgule, c'est-à-dire un nombre *fini* de chiffres. Donc x est décimal. **C.Q.F.D.**

à connaître

Exemple : démontrer que 1/3 n'est pas décimal.

On fait une démonstration par l'absurde : si 1/3 était décimal, il pourrait s'écrire

$$\frac{1}{3} = \frac{n}{10^r} \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad 10^r = 3 \times n$$

avec $n \in \mathbf{Z}$ et $r \in \mathbf{N}$. Cela veut dire que 10^r est un multiple de 3. Or ce n'est pas le cas : la somme des chiffres de 10^r vaut 1, qui n'est pas un multiple de 3, donc 10^r n'est pas divisible par 3.

On a une contradiction, donc l'hypothèse de départ (1/3 est décimal) est fausse. Ce n'est donc pas un nombre décimal.

5 Nombres rationnels

Définition (nombres rationnels).

i) On dit qu'un nombre est *rationnel* lorsqu'il peut s'écrire comme une fraction d'entiers, c'est-à-dire sous la forme

$$\frac{a}{b}$$

avec $a \in \mathbf{Z}$ et $b \in \mathbf{Z} - \{0\}$.

ii) L'ensemble des nombres rationnels s'appelle $\mathbf{Q}$.

Évidemment si b est une puissance de dix, on obtient un nombre décimal : les nombres décimaux sont donc des cas particuliers de nombres rationnels, ce qu'on écrit $\mathbf{D} \subseteq \mathbf{Q}$. Les raisons du choix de la lettre $\mathbf{Q}$ pour désigner les rationnels ne sont pas très claires. Pour simplifier, disons que la lettre $\mathbf{R}$ était déjà prise (pour les nombres *réels*), et que $\mathbf{Q}$ est la première lettre du mot *quotient*.

Il existe des nombres qui ne sont pas rationnels (on dit qu'ils sont *irrationnels*). Il y a une infinité de nombres irrationnels, mais on va se concentrer sur le plus célèbre d'entre eux.

Propriété (irrationnalité de la constante de Pythagore).

Le nombre $\sqrt{2}$ est *irrationnel* : on ne peut pas l'écrire comme une fraction de deux entiers.

Preuve. Nous faisons une démonstration *par l'absurde* : on fait l'hypothèse que $\sqrt{2}$ est une fraction d'entiers, et une contradiction va apparaître.

D'abord on simplifie, tant que c'est possible, cette fraction « par 2 ». On aboutit donc à une écriture

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

avec a et b qui ne sont pas tous les deux pairs (puisqu'on a simplifié 2 autant que possible). En élevant au carré, on obtient

$$(\sqrt{2})^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \quad \text{donc} \quad 2 = \frac{a^2}{b^2} \quad \text{donc} \quad 2 \times b^2 = a^2.$$

Ceci nous dit que a^2 est pair, et donc a aussi (car un nombre et son carré ont toujours la même parité). Écrivons $a = 2 \times k$ pour un certain entier k (tous les nombres pairs sont de cette forme) et nous obtenons

$$2 \times b^2 = (2 \times k)^2 \quad \text{donc} \quad 2 \times b^2 = 4 \times k^2 \quad \text{donc} \quad b^2 = 2 \times k^2,$$

après avoir divisé chaque membre par 2. Mais ceci montre que b^2, et donc b, sont eux aussi pairs.

C'est la contraction que nous cherchions : on a vu que a et b ne peuvent pas être tous les deux pairs, et on vient de montrer qu'ils le sont. L'hypothèse de départ ($\sqrt{2}$ est une fraction d'entiers) est donc fausse, ce qui veut dire que $\sqrt{2}$ est irrationnel. **C.Q.F.D.**

Voyons pour terminer ce paragraphe comment reconnaître un nombre rationnel en regardant son développement décimal.

Propriété (développement décimal des nombres rationnels).
Un nombre est rationnel si et seulement si son développement décimal se répète à partir d'un certain moment. Par exemple $2{,}500\,000\ldots$ (le 0 se répète) ou $-14{,}529\,129\,129\,1\ldots$ (le 291 se répète).

Nous n'allons pas rédiger la démonstration dans le cas général, en revanche il faut connaître les méthodes correspondant à chaque implication. L'idée principale, une fois qu'on a identifié la *période* du développement décimal, est d'utiliser les nombres « avec que des 9 » :

$$0{,}155\,155\,155\ldots = 155 \times 0{,}001\,001\,001\ldots = 155 \times \frac{1}{999} = \frac{155}{999}$$

$$0{,}003\,870\,038\,700\,387\ldots = 387 \times 0{,}000\,010\,000\,100\,001\ldots = 387 \times \frac{1}{99\,999} = \frac{387}{99\,999}.$$

à connaître

Implication directe : trouver la période du développement décimal de $115/52$.

Il s'agit de *poser* la division, jusqu'à trouver un reste qui se répète.

$$\begin{array}{l|l}
115 & 52 \\ \cline{2-2}
\ \ 110 & 2{,}2\,1\,1\,5\,3\,8\,4\,6 \\
\quad\ \ 60 & \\
\quad\ \ \ 80 & \\
\quad\ \ \ 280 & \\
\quad\quad\ 200 & \\
\quad\quad\ \ 440 & \\
\quad\quad\quad 240 & \\
\quad\quad\quad\ 320 & \\
\quad\quad\quad\quad\ 8 &
\end{array}$$

Et on peut continuer mais c'est inutile : on a *déjà rencontré* le reste 8 six étapes plus tôt, qui avait donné la décimale 1 (celle peinte en rose), donc les restes (et les décimales) vont se reproduire à l'identique à partir de là. La période est donc 153 864, c'est-à-dire

$$\frac{115}{52} = 2{,}21\underbrace{1\,538\,46}_{\text{période}}1\,538\,461\,538\,461\,538\,46\ldots$$

à connaître

Implication réciproque : trouver une fraction égale à $3{,}047\,272\,727\,2\ldots$.

On décompose

$$3{,}047\,272\,727\,2\ldots = 3{,}04 + 0{,}007\,272\,727\,2\ldots = \frac{304}{100} + \frac{1}{100} \times 0{,}727\,272\,72\ldots = \frac{304}{100} + \frac{1}{100} \times \frac{72}{99}$$

Ensuite, on prend la calculatrice ou on termine à la main :

$$\frac{304}{100} + \frac{1}{100} \times \frac{72}{99} = \frac{304_{\times 99}}{100_{\times 99}} + \frac{72}{100 \times 99} = \frac{30096}{9900} + \frac{72}{9900} = \frac{30168}{9900}.$$

L'énoncé ne demande pas de donner une fraction *irréductible*, donc on peut s'arrêter là.

Écrivons le programme qui étant donnés les chiffres « avant la virgule » `E`, la partie non-périodique « après la virgule » `F` et la période `P` retrouve la fraction correspondante (donc le programme qui résout automatiquement l'exercice ci-dessus). À nouveau on utilise des chaînes de caractères (qui permettent d'écrire, par exemple `"03"`) plutôt que des entiers (parce que 03 n'a pas de sens). La commande `int` transforme une chaîne de caractères en entier.

```python
from fractions import Fraction
def TrouverFraction(E, F, P) :
    e = int(E) ; f = int(F) ; p = int(P)
    return e + (f + Fraction(p, 10 ** len(P) - 1)) / 10 ** len(F)
```

Et on teste, pour vérifier. Le calcul avec `/` donne un 8 à la fin parce que Python fait l'arrondi, et pas une troncature.

```python
>>> TrouverFraction("12", "03", "7")
Fraction(5417, 450)
>>> 5417 / 450
12.037777777777778
```

6 Résumé des différentes sortes de nombres

Nous avons vu que les entiers naturels sont des cas particuliers d'entiers relatifs, qui eux-mêmes sont des cas particuliers de nombres décimaux, qui eux-mêmes sont des cas particuliers de nombres rationnels, qui eux-mêmes sont des cas particuliers de nombres réels, ce qu'on écrit

$$\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{D} \subseteq \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{R}.$$

Résumons tout ceci dans un tableau.

<table>
<tr><td rowspan="5">R NOMBRES RÉELS</td><td colspan="5">les nombres irrationnels : $\sqrt{2}$ $\sqrt{3}$ π etc.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Q RATIONNELS</td><td colspan="4">$\frac{1}{3} \simeq 0{,}333\,333\ldots$ $\frac{1}{7} \simeq 0{,}142\,857\ldots$ etc.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">D DÉCIMAUX</td><td colspan="3">$1{,}5$ $\frac{1}{2} = 0{,}5$ $-0{,}99$ $\frac{33}{100} = 0{,}33$ etc.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Z RELATIFS</td><td colspan="2">les entiers strictement négatifs : -1 etc.</td></tr>
<tr><td>N NATURELS</td><td>0 (zéro)
1 (un)
les nombres premiers :
2 3 5 7 11 etc.
les nombres composés :
4 6 8 9 10 etc.</td></tr>
</table>