CONVERSIONS DES UNITÉS DE MESURE, ÉCRITURE SCIENTIFIQUE

1 Puissances de dix et préfixes du Système International

Commençons par dire que dans l'écriture 10^n, le nombre $n \in \mathbf{Z}$ indique le nombre de zéros (qu'il soit positif ou négatif) :

$$10^{7} = 1\underbrace{0\,000\,000}_{\text{7 zéros}} \qquad 10^{0} = \underset{\text{pas de zéro}}{1} \qquad 10^{-9} = \underbrace{0{,}000\,000\,00}_{\text{9 zéros}}1.$$

Alors il y a des *mots* pour ces nombres...

nombre	**puissance de dix**	**nom français** (échelle *longue*)	**nom anglais** (échelle *courte*)
10	10^1	dix	ten
100	10^2	cent	one hundred
1 000	10^3	mille	one thousand
1 000 000	10^6	un million	one million
1 000 000 000	10^9	un milliard	one billion
1 000 000 000 000	10^{12}	un billion	one trillion
0,1	10^{-1}	un dixième	one tenth
0,01	10^{-2}	un centième	one hundredth
0,001	10^{-3}	un millième	one thousandth
0,000 001	10^{-6}	un millionième	one millionth
0,000 000 001	10^{-9}	un milliardième	one billionth
0,000 000 000 001	10^{-12}	un billionième	one trillionth

...ainsi que des *préfixes*, qu'on utilise avec les unités de mesure. Ça ne rentre pas sur une ligne, donc on fait en deux fois, mais il faut imaginer que c'est « à la suite ».

10^{15}	10^{14}	10^{13}	10^{12}	10^{11}	10^{10}	10^{9}	10^{8}	10^{7}	10^{6}	10^{5}	10^{4}	10^{3}	10^{2}	10^{1}	10^{0}
péta			téra			giga			méga			kilo	hecto	déca	

10^{0}	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}	10^{-9}	10^{-10}	10^{-11}	10^{-12}	10^{-13}	10^{-14}	10^{-15}
	déci	centi	milli			micro			nano			pico			femto

Ces préfixes ont évidemment des symboles. Voici tous les préfixes du Système International d'Unités, en 1975 (on en a ajouté en 1991 et à nouveau en 2022, pour les très grandes et les très petites choses).

préfixe	valeur	symbole
exa	10^{18}	E
péta	10^{15}	P
téra	10^{12}	T
giga	10^{9}	G
méga	10^{6}	M
kilo	10^{3}	k
hecto	10^{2}	h
déca	10^{1}	da

préfixe	valeur	symbole
déci	10^{-1}	d
centi	10^{-2}	c
milli	10^{-3}	m
micro	10^{-6}	µ
nano	10^{-9}	n
pico	10^{-12}	p
femto	10^{-15}	f
atto	10^{-18}	a

à connaître

Rappel : utilisation d'un tableau de conversion.

Étape 1. On écrit la valeur de départ, en plaçant son chiffre des unités dans la colonne de l'unité utilisée. Par exemple pour 103,5 cm on place le 3 dans la colonne des cm. *On n'écrit pas la virgule.*

km	hm	dam	m	dm	cm	mm			µm
			1	0	3	5			

Étape 2. On met des zéros dans toutes les colonnes qui restent.

km	hm	dam	m	dm	cm	mm			µm
0	0	0	1	0	3	5	0	0	0

Étape 3. On place la virgule après le chiffre de la colonne de l'unité voulue. Par exemple si l'on veut des kilomètres, on place la virgule dans la colonne des km.

km	hm	dam	m	dm	cm	mm			µm
0,	0	0	1	0	3	5	0	0	0

Étape 4. On lit le résultat, en enlevant les zéros inutiles. Ici on trouve 103,5 cm = 0,001 035 km.

2 Multiplication et division par les puissances de dix

Règles.

Soit $n \in \mathbf{N}$.

i) Multiplier par 10^n revient à décaler la virgule de n positions « dans le sens qui fait grandir ».

$$123{,}456\,789 \times 10^{5} = 12\,3\underbrace{45\,678}_{5 \text{ positions}},9 \qquad \text{(et le résultat est plus } \textit{grand}\,!)$$

ii) Diviser par 10^n revient à décaler la virgule de n positions « dans le sens qui rend plus petit ».

iii) Multiplier par 10^{-n} est la même chose que diviser par 10^n.

iv) Diviser par 10^{-n} est la même chose que multiplier par 10^n.

On peut maintenant démontrer la *règle de la virgule*, vue dans la leçon **2**.

Règle de la virgule.

Soient $x, y \in \mathbf{R}$. S'il y a m chiffres après la virgule dans x, et n chiffres après la virgule dans y, alors il y a $m + n$ chiffres après la virgule dans $x \times y$ (en comptant les zéros « inutiles » qui apparaissent éventuellement quand on pose la multiplication).

Preuve. S'il y a m chiffres après la virgule dans x, alors $10^m \times x$ est un entier. De même s'il y a n chiffres après la virgule dans y, alors $10^n \times y$ est un entier. D'ailleurs $10^m \times x$ et $10^n \times y$ sont les deux nombres qu'on écrit lorsqu'on pose la multiplicaiton « sans tenir compte de la virgule ». Alors

$$x \times y = \underbrace{(10^m \times x) \times (10^n \times y)}_{\text{est un entier}} \div 10^{m+n}$$

contient donc $m+n$ chiffres après la virgule (puisque c'est un entier et que la division par 10^{m+n} fait apparaître une virgule en position $m+n$). **C.Q.F.D.**

Définition (écriture scientifique).
Tout nombre x (hormis zéro) peut s'écrire, en décalant correctement la virgule, d'une unique manière sous la forme

$$x = \pm m \times 10^e,$$

avec $1 \leqslant m < 10$ (c'est la *mantisse*) et $e \in \mathbf{Z}$ (c'est l'*exposant*).

$$\mathscr{G} = \underbrace{\boxed{6{,}674\,30\ldots}}_{\text{mantisse}} \times 10^{\overset{\text{exposant}}{\boxed{-11}}}$$

La mantisse est comprise entre 1 (au sens large) et 10 (au sens strict) signifie qu'il n'y a *qu'un seul* chiffre avant la virgule, et que ce chiffre n'est pas 0.

3 Conversion des unités-puissances

Une chose importante à comprendre : 3 cm veut dire $3 \times \text{cm}$, et cm veut dire $\text{c} \times \text{m}$. C'est encore cette histoire de symbole $\times$ qu'on n'écrit pas toujours dans les multiplications. Et puisque c vaut 10^{-2}, on a donc

$$3\,\text{cm} = 3 \times \text{c} \times \text{m} = 3 \times 10^{-2} \times \text{m}.$$

Rappel.
Quels que soient $m, n \in \mathbf{Z}$ on a $10^m \times 10^n = 10^{m+n}$. Par exemple $10^4 \times 10^{-7} = 10^{-3}$.

à connaître

Exemple 1 : convertir 3 451 cm *en kilomètres.*
On procède en deux étapes : d'abord c (centi) vaut 10^{-2} (c'est-à-dire $\text{cm} = 10^{-2}\,\text{m}$) donc

$$3\,451\,\text{cm} = 3\,451 \times 10^{-2}\,\text{m}.$$

Ensuite, k (kilo) vaut 10^3 (c'est-à-dire $\text{km} = 10^3\,\text{m}$), donc $10^{-3}\,\text{km} = \text{m}$. Ainsi

$$3\,451 \times 10^{-2}\,\text{m} = 3\,451 \times 10^{-2} \times 10^{-3}\,\text{km} = 3\,451 \times 10^{-5}\,\text{km} = 0{,}034\,51\,\text{km}.$$

Pour ceux qui n'ont pas compris la manœuvre : $\text{km} = 10^3\,\text{m} \overset{\div 10^3}{\Leftrightarrow} 10^{-3}\,\text{km} = \text{m}$, puisque diviser par 10^3 c'est la même chose que multiplier par 10^{-3}.

Rappel.
Quels que soient $m, n \in \mathbf{Z}$ on a $(10^m)^n = 10^{m \times n}$. Par exemple $(10^{-4})^2 = 10^{-8}$.

Dans le cas des unités-puissances, même chose : il faut comprendre que $3\,\text{cm}^3$ veut dire $3 \times (\text{cm})^3$, c'est-à-dire $3 \times \text{c}^3 \times \text{m}^3$. Avec donc c^3 qui vaut $(10^{-2})^3 = 10^{-6}$. Dans un tableau de conversion, il faut donc se déplacer de *six* colonnes pour aller des cm^3 aux m^3.

Définition (litres).
Un *litre* (noté $1\,\ell$) est une unité de volume qui correspond à $1\,000\,\text{cm}^3$.

m^3 1	 10^{-1}	 10^{-2}	dm^3 10^{-3}	 10^{-4}	 10^{-5}	cm^3 10^{-6}	 10^{-7}	 10^{-8}	mm^3 10^{-9}
$\text{k}\ell$ 10^3	$\text{h}\ell$ 10^2	$\text{da}\ell$ 10^1	ℓ 1	$\text{d}\ell$ 10^{-1}	$\text{c}\ell$ 10^{-2}	$\text{m}\ell$ 10^{-3}	 10^{-4}	 10^{-5}	$\mu\ell$ 10^{-6}
			1	0	0	0			

Exemples de lectures.

i) Dans la première ligne, l'unité de référence (l'unité correspond, comme son nom l'indique, à la colonne « 1 » !) est le mètre-cube. Ainsi par exemple $\text{mm}^3 = 10^{-9}\,\text{m}^3$.

ii) Dans la deuxième ligne, l'unité de référence est le litre. Ainsi $1\,\text{k}\ell = 10^3\,\ell = 1\,\text{m}^3$ (puisque c'est la même colonne). On voit aussi que $1\,\ell = 1\,\text{dm}^3$ ou encore $1\,\text{m}\ell = 1\,\text{cm}^3$.

iii) Sur la troisième ligne on voit la correspondance $1\,\ell = 1\,000\,\text{cm}^3$.

Attention : il y a une différence de convention entre les unités-puissances et le calcul littéral habituel. Ainsi $\text{cm}^3 = \text{cm} \times \text{cm} \times \text{cm}$ (donc trois fois le c et trois fois le m), alors qu'habituellement $ab^3 = a \times b \times b \times b$ (donc *une seule* fois le a et trois fois le b). Autrement dit on considère que « centi-mètre-cube » veut dire « (centi-mètre) au cube » (donc $(10^{-2}m)^3$), et pas « centi-(mètre au cube) » (donc $10^{-2}m^3$).

à connaître

Exemple 2 : convertir $1{,}25\,\text{s}^2$ *en* ms^2.
Puisque $\text{ms} = 10^{-3}\,\text{s}$, on a $\text{ms}^2 = (10^{-3}\,\text{s})^2 = 10^{-6}\,\text{s}^2$. Donc $10^6\,\text{ms}^2 = \text{s}^2$. Ainsi

$$1{,}25\,\text{s}^2 = 1{,}25 \times 10^6\,\text{ms}^2 = \text{s}^2 = 1\,250\,000\,\text{ms}^2.$$

4 Conversion des unités-produits ou des unités-quotients

Encore une fois, il s'agit simplement de comprendre ce que signifie l'unité produit ou quotient : on fait apparaître les multiplications ou les divisions (sous forme de fractions). Par exemple

$$1{,}3\,\text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2 = 1{,}3 \times \frac{\text{kg} \times \text{m}}{\text{s}^2}.$$

Et là on remplace kg ou m ou s en fonction de l'unité demandée.

Rappel.
Quels que soient $m, n \in \mathbf{Z}$ on a $\dfrac{10^m}{10^n} = 10^{m-n}$. Par exemple $\dfrac{10^5}{10^8} = 10^{-3}$.

à connaître

Exemple 3 : convertir $120\,\text{km/h}$ *en* m/s.
On sait que $\text{km} = 10^3\,\text{m}$ et que $\text{h} = 3\,600\,\text{s}$. Ainsi

$$120\,\text{km/h} = 120 \times \frac{\text{km}}{\text{h}} = 120 \times \frac{10^3\,\text{m}}{3\,600\,\text{s}} = \underbrace{120 \times \frac{10^3}{3\,600}}_{\simeq 33{,}33} \times \frac{\text{m}}{\text{s}} \simeq 33{,}33\,\text{m/s}.$$