2$^{\text{NDE}}$ GÉNÉRALE & TECHNOLOGIQUE — MATHÉMATIQUES — LEÇON 5

TAUX D'ÉVOLUTION

1 Pourcentages

DÉFINITION (POURCENTAGES).
Un *pourcentage* est une fraction dont le dénominateur est égal à 100. Il y a une notation spéciale pour cela :

$$\frac{12{,}7}{100} = 12{,}7\,\%.$$

Quand on exprime les résultats en pourcentages, ils sont donc *tous au même dénominateur*, ce qui permet de les comparer facilement.

Et on a donc trois écritures pour *la même chose* : $12{,}7\,\% = \dfrac{12{,}7}{100} = 0{,}127$.

à connaître

Exemple : exprimer $5/12$ *en pourcentage.*
On va voir trois méthodes et il *faut* les comprendre *toutes les trois.*

Première méthode. On cherche à « compliquer » la fraction. Pour aller de 12 à 100 il faut multiplier par

$$12 \times \boxed{} = 100 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{} = 100 \div 12 \simeq 8{,}333\ldots \qquad \text{donc} \qquad \frac{5_{\times 8{,}333\ldots}}{12_{\times 8{,}333\ldots}} \simeq \frac{41{,}666\ldots}{100} \simeq 41{,}666\,\%.$$

Deuxième méthode. Si on a une calculatrice, on évalue :

$$\frac{5}{12} \simeq 0{,}416\,66\cdots \simeq 41{,}666\,\%.$$

Troisième méthode. On utilise la *proportionnalité* et on fait un *produit en croix* (voir la leçon **8**) :

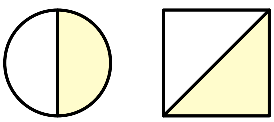
$$\frac{5}{12} = \frac{?}{100}$$

5	?
12	100

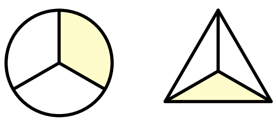
c'est un tableau de proportionnalité !

$$? = \frac{5 \times 100}{12} \simeq 41{,}666\ldots \qquad \text{donc} \qquad \frac{5}{12} \simeq 41{,}666\,\%.$$

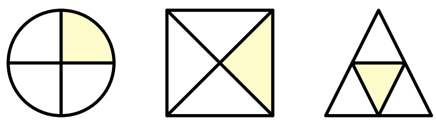
Il faut connaître les *petites fractions* par cœur ! Les voici.



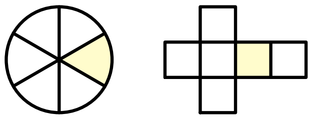
$\dfrac{1}{2} = 0{,}5 = 50\,\%$



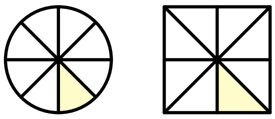
$\dfrac{1}{3} \simeq 0{,}333\ldots \simeq 33{,}3\ldots\,\%$



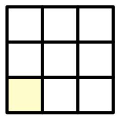
$\dfrac{1}{4} = 0{,}25 = 25\,\%$



$\frac{1}{6} \simeq 0{,}1666\ldots \simeq 16{,}66\ldots\,\%$



$\frac{1}{8} = 0{,}125 = 12{,}5\,\%$



$\frac{1}{9} \simeq 0{,}111\ldots \simeq 11{,}1\ldots\,\%$

Il faut aussi connaître les diviseurs de 100 (qu'on a déjà rencontrés dans la leçon **4**).

$$100 = 1 \times 100 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{100} = 1\,\%$$
$$100 = 2 \times 50 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{50} = 2\,\%$$
$$100 = 4 \times 25 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{25} = 4\,\%$$
$$100 = 5 \times 20 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{20} = 5\,\%$$
$$100 = 10 \times 10 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{10} = 10\,\%$$

$$100 = 20 \times 5 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{5} = 20\,\%$$
$$100 = 25 \times 4 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{4} = 25\,\%$$
$$100 = 50 \times 2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} = 50\,\%$$
$$100 = 100 \times 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 = \frac{1}{1} = 100\,\%$$

Expliquons pourquoi ça marche (c'est un *produit en croix* déguisé) :

$$1 = \frac{100}{100} = \frac{4 \times 25}{100} = 4 \times \frac{25}{100} = 4 \times 25\,\% \qquad \text{et} \qquad 1 = 4 \times 25\,\% \overset{\div 4}{\Leftrightarrow} \frac{1}{4} = 25\,\%.$$

Et évidemment ça marche aussi pour des nombres à virgule : par exemple

$$100 = 0{,}1 \times 1000 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{1000} = 0{,}1\,\% \qquad\qquad 100 = 0{,}2 \times 500 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{500} = 0{,}2\,\%.$$

2 Augmentations et réductions

Définition (augmentations et réductions).

i) *Augmenter* une somme x de (par exemple) 35 %, c'est ajouter 35 % de x à x :

$$x + 35\,\% \times x.$$

On dit « x plus 35 % » mais ce n'est pas rigoureux : on devrait dire « x plus 35 % de x ».

ii) *Réduire* une somme x de (par exemple) 64 %, c'est retrancher 64 % de x à x :

$$x - 64\,\% \times x.$$

On dit « x moins 64 % » mais ce n'est pas rigoureux : on devrait dire « x moins 64 % de x ».

Exemple : si on augmente 200 € de 72 % on obtient

$$200\,€ + 72\,\% \times 200\,€ = 200\,€ + \underbrace{0{,}72 \times 200}_{=144}\,€ = 200\,€ + 144\,€ = 344\,€.$$

Propriétés (formules pour les augmentations et les réductions).

i) Ajouter (par exemple) 24 % revient à multiplier par

$$1 + 24\,\% = 1 + \frac{24}{100} = 1 + 0{,}24 \quad \text{(toujours les } \textit{trois} \text{ écritures).}$$

ii) Réduire/diminuer de 45 % revient à multiplier par

$$1 - 45\,\% = 1 - \frac{45}{100} = 1 - 0{,}45.$$

Attention, qu'il s'agisse d'une augmentation *ou* d'une réduction, *on fait dans tous les cas une multiplication.* Il n'y a pas de division dans cette histoire.

à connaître

Exemple 1 : si l'on augmente 500 € *de* 150 %*, combien obtient-on ?*

On a 150 % = 1,50 donc on obtient $500\,€ \times \underbrace{(1+1{,}50)}_{=2{,}5} = 1\,250\,€$.

à connaître

Exemple 2 : après avoir diminué de 32 % *un prix devient* 122,40 €*. Quelle était la valeur de départ ?*

On a 32 % = 0,32. On doit donc résoudre

$$\boxed{} \times \underbrace{(1-0{,}32)}_{=0{,}68} = 122{,}40\,€$$

(c'est bien une *multiplication*, mais « à trou »). La réponse est

$$\boxed{} = 122{,}40\,€ \div 0{,}68 = 180\,€.$$

On voit qu'il y a une division, *mais pas* parce qu'on a diminué quelque chose : la division est due au fait que c'est la valeur *de départ* qu'on ne connaît pas.

3 Taux d'évolution

Dans ce paragraphe on résout la dernière situation : on connaît la valeur de départ $\mathrm{V_d}$ et la valeur d'arrivée $\mathrm{V_a}$, et *c'est le pourcentage qui est inconnu.*

Définition/propriété (taux d'évolution).
On suppose que la valeur de départ $\mathrm{V_d}$ est positive. Le *taux d'évolution* de $\mathrm{V_d}$ à $\mathrm{V_a}$ est

$$t = \frac{\mathrm{V_a} - \mathrm{V_d}}{\mathrm{V_d}}.$$

S'il est positif, c'est qu'on a *augmenté* $\mathrm{V_d}$ du taux $|t|$, et s'il est négatif, c'est qu'on a *diminué* $\mathrm{V_d}$ du taux $|t|$ (avec $|t|$ la *valeur absolue* de t, c'est-à-dire la valeur *sans* le signe).

Qu'est-ce qu'un *taux* ? C'est une valeur qu'on exprime le plus souvent en pourcentage. Par exemple $t = 3\,\%$. On dit *taux* et pas *pourcentage* parce que si l'on écrit $t = 0{,}03$ (ce qui est la même chose que 3 %) ce *n'est pas* un pourcentage. On évite ainsi la confusion entre $t = 3 = 300\,\%$ et $t = 0{,}03 = 3\,\%$.

Preuve de la formule. On note t le taux appliqué à $\mathrm{V_d}$ pour obtenir $\mathrm{V_a}$, en convenant donc qu'on fait une augmentation s'il est positif et une diminution s'il est négatif. Ainsi

$$\mathrm{V_d} \times (1+t) = \mathrm{V_a}.$$

Vérifions la cohérence avec le paragraphe précédent : si on augmente de $15\,\% = 0{,}15$ on a donc $t = 0{,}15$ ce qui fait bien $\mathrm{V_d} \times (1+t) = \mathrm{V_d} \times (1+0{,}15)$, et si on diminue de $15\,\% = 0{,}15$ on a donc $t = -0{,}15$ ce qui fait bien $\mathrm{V_d} \times (1+t) = \mathrm{V_d} \times (1-0{,}15)$.

Revenons à la démonstration. On doit résoudre l'équation d'inconnue t. Nous verrons la méthode dans la leçon **11** mais anticipons :

$$\mathrm{V_d} \times (1+t) = \mathrm{V_a} \overset{\div \mathrm{V_d}}{\Leftrightarrow} 1+t = \frac{\mathrm{V_a}}{\mathrm{V_d}} \overset{-1}{\Leftrightarrow} t = \frac{\mathrm{V_a}}{\mathrm{V_d}} - \underbrace{1}_{=\frac{\mathrm{V_d}}{\mathrm{V_d}}} \Leftrightarrow t = \frac{\mathrm{V_a}}{\mathrm{V_d}} - \frac{\mathrm{V_d}}{\mathrm{V_d}} \Leftrightarrow t = \frac{\mathrm{V_a} - \mathrm{V_d}}{\mathrm{V_d}}.$$

C.Q.F.D.

à connaître

Exemple : le prix d'un article passe de 15 € à 18 €. Quel est le taux d'évolution correspondant ?

Alors donc on applique la formule

$$t = \frac{\mathrm{V_a} - \mathrm{V_d}}{\mathrm{V_d}} = \frac{18\,€ - 15\,€}{15\,€} = \frac{3\,€}{15\,€} = 0{,}2 = 20\,\%.$$

Le prix a donc augmenté de 20 %.

④ Évolutions successives

Lorsqu'on doit appliquer successivement plusieurs taux d'évolution t_1, t_2, t_3, etc., on multiplie par $(1 + t_1) \times (1 + t_2) \times (1 + t_3) \times \ldots$.

à connaître

Exemple : on applique à une certaine valeur trois augmentations successives : d'abord 10 %, puis 20 %, et enfin 30 %. Quel est le taux d'évolution global ?

L'énoncé ne donne pas la valeur de départ, parce qu'on n'en a pas besoin. On a $10\,\% = 0{,}1$, $20\,\% = 0{,}2$ et $30\,\% = 0{,}3$, donc

$$\begin{tikzcd} \mathrm{V_d} \arrow[r, "\times(1+0{,}1)"] \arrow[rrr, bend right, "\times(1+0{,}1)\times(1+0{,}2)\times(1+0{,}3)"'] & \boxed{} \arrow[r, "\times(1+0{,}2)"] & \boxed{} \arrow[r, "\times(1+0{,}3)"] & \mathrm{V_a}. \end{tikzcd}$$

On a donc multiplié en tout par $1{,}1 \times 1{,}2 \times 1{,}3 = 1{,}716$. Voici la partie essentielle : si t désigne le taux d'évolution global, alors on passe de $\mathrm{V_d}$ à $\mathrm{V_a}$ en multipliant par $1 + t$, donc

$$1 + t = 1{,}716 \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad t = 0{,}716 = 71{,}6\,\%.$$

En tout, on a effectué une augmentation de 71,6 %.

Attention , les taux d'évolution ne s'ajoutent pas ! Sinon, on aurait trouvé une augmentation globale de $10\,\% + 20\,\% + 30\,\% = 60\,\%$ dans l'exemple ci-dessus.

⑤ Évolution réciproque

Si l'on applique une réduction de 20 %, suivie d'une augmentation de 20 % on *ne retrouve pas* la valeur de départ, mais moins : par exemple

$$50 \xrightarrow{-20\,\%} 50 \times (1 - 0{,}20) = 40 \xrightarrow{+20\,\%} 40 \times (1 + 0{,}20) = 48.$$

Le taux qui permet « d'annuler » l'évolution précédente est appelé *taux d'évolution réciproque*. On pourrait en donner une formule, mais l'idée est de connaître la méthode pour le calculer.

à connaître

Exemple : quel taux d'évolution « annule » une augmentation de 40 % ?

À nouveau, on ne donne pas la valeur de départ, car elle ne sert pas (quelle que soit la valeur qu'on choisit, la réponse est la même) :

$$\mathrm{V_d} \xrightarrow{\times(1+0{,}40)} \mathrm{V_a} \xrightarrow{\times(1+?)} \mathrm{V_d}.$$

Le point-clé : puisqu'on va (globalement) de $\mathrm{V_d}$ à $\mathrm{V_d}$, on a globalement multiplié par 1 (c'est-à-dire qu'on n'a rien changé, puisque multiplier par 1, ça ne fait rien). Il s'agit donc de résoudre

$$(1 + 0{,}40) \times \boxed{1+?} = 1$$

ce qui donne

$$\boxed{1+?} = 1 \div (1 + 0{,}40) = 1 \div 1{,}4 \simeq 0{,}714\,3 \quad \text{c'est-à-dire} \quad ? \simeq 0{,}714\,3 - 1 \simeq -0{,}285\,7 \simeq -28{,}57\,\%.$$

L'évolution réciproque est donc une diminution de 28,57 %.