DIVISIONS, FRACTIONS, POURCENTAGES & PROBABILITÉS

1 Multiplications à trous

Définition (division).
i) L'opération qui résout une multiplication « à trou »

$$6 \times \boxed{} = 21 \qquad \text{ou} \qquad \boxed{} \times 6 = 21$$

s'appelle la *division*. Son résultat se note $21 \div 6$.
ii) Dans l'écriture $21 \div 6 = 3{,}5$, le premier opérande 21 s'appelle *dividende* (avec un « e » et pas un « a »), le deuxième opérande 6 s'appelle *diviseur*, et le résultat 3,5 s'appelle *quotient*.

À retenir absolument : lorsqu'on résout une multiplication à trou (quel que soit la position du trou) *le produit devient de le dividende*. Ainsi :

$$8 \times \boxed{} = \underset{\text{produit}}{36} \quad \text{ou} \quad \boxed{} \times 8 = \underset{\text{produit}}{36} \qquad \Leftrightarrow \qquad \boxed{} = \underset{\text{dividende}}{36} \div 8 = 4{,}5.$$

Et comme en général il est plus commode d'écrire une lettre que de dessiner une petite boîte, on verra plutôt

$$8 \times x = \underset{\text{produit}}{36} \quad \text{ou} \quad x \times 8 = \underset{\text{produit}}{36} \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \underset{\text{dividende}}{36} \div 8 = 4{,}5$$

mais c'est rigoureusement la même chose.

à connaître

Exemple 1. On donne la relation $d = v \times t$. Exprimer v en fonction de d et t. Donc v est « le trou », ou plutôt *l'inconnue*, et on a

$$\boxed{v} \times t = \underset{\text{produit}}{d} \qquad \Leftrightarrow \qquad \boxed{v} = \underset{\text{dividende}}{d} \div t \qquad \text{ou sous forme fractionnaire} \qquad \boxed{v} = \frac{d}{t}.$$

à connaître

Exemple 2. On donne la relation $\mathrm{P} \times \mathrm{V} = n \times \mathrm{R} \times \mathrm{T}$. Exprimer R en fonction des autres :

$$n \times \boxed{\mathrm{R}} \times \mathrm{T} = \underset{\text{produit}}{\mathrm{P} \times \mathrm{V}} \qquad \Leftrightarrow \qquad \boxed{\mathrm{R}} = \underset{\text{dividende}}{(\mathrm{P} \times \mathrm{V})} \div (n \times \mathrm{T}) \qquad \text{ou} \qquad \boxed{\mathrm{R}} = \frac{\mathrm{P} \times \mathrm{V}}{n \times \mathrm{T}}.$$

On voit l'intérêt de l'écriture fractionnaire : elle permet de ne pas écrire les parenthèses. Nous en reparlerons dans quelques paragraphes.

Règle.
On ne peut pas diviser par zéro.

Voyons en effet ce qu'il se passe dans la multiplication à trou. Si le résultat n'est pas nul

$$0 \times \square = 10$$

il n'y a pas de solution, car en multipliant zéro, on obtient *toujours* zéro : on ne peut pas définir $10 \div 0$ car aucun résultat ne conviendrait. Et si le résultat est nul, on a aussi un problème : dans

$$0 \times \square = 0$$

on ne peut pas trouver *la* solution, parce qu'en fait *tous* les nombres sont des solutions : on ne peut pas définir $0 \div 0$ car tous les résultats conviendraient.

⚠ Une remarque importante : si a est un nombre différent de zéro, on sait que $a \times 1 = a$. Cela signifie que $a \div a = 1$ (lorsqu'on divise un nombre par lui-même, on obtient toujours 1).

2 Division euclidienne

Effectuer *division euclidienne* d'un nombre a par un nombre b consiste à essayer d'obtenir a en additionnant (ou en soustrayant) un certain nombre de fois b. Voici deux exemples (à gauche : $a = 10$ et $b = 2$, à droite : $a = 47$ et $b = 8$) :

$$10 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 \qquad \text{et} \qquad 47 = 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 7.$$

On voit que ce n'est pas toujours possible : le dernier morceau incomplet s'appelle *le reste*. Voyons trois autres exemples, avec $a = 15$ et $b = 4$:

$$15 = 4 + 4 + 4 + 4 + \underbrace{(-1)}_{\text{reste}} \qquad 15 = 4 + 4 + 4 + \underbrace{3}_{\text{reste}} \qquad 15 = 4 + 4 + \underbrace{7}_{\text{reste}}.$$

On voit qu'il y a plusieurs manières de partager a en un certain nombre de fois b, selon les valeurs qu'on autorise pour le reste. Nous allons convenir d'une règle : le reste doit être positif, et *strictement inférieur à la valeur absolue de b* (c'est-à-dire la valeur de b « sans son signe », nous verrons ce que c'est en détail dans la leçon **12**). Rappelons enfin qu'on peut utiliser une multiplication pour *répéter* une addition ou une soustraction :

$$b + b + b + b + b + b = 6 \times b \qquad \text{et} \qquad -b - b - b - b - b - b - b - b = (-8) \times b.$$

Définition (division euclidienne dans $\mathbf{R}$).
Soient a et b deux nombres, avec b différent de zéro. Il existe une seule manière (nous admettrons ce fait) d'obtenir a en additionnant (ou en soustrayant) un certain nombre de fois b, telle que le reste soit compris entre 0 (au sens large) et $|b|$ (au sens strict) :

$$a = b + b + b + \ldots + b + r = \underbrace{q}_{\text{positif}} \times b + r \qquad \text{ou} \qquad a = -b - b - b - \ldots - b + r = \underbrace{q}_{\text{négatif}} \times b + r.$$

Le nombre $q \in \mathbf{Z}$ s'appelle le *quotient euclidien* (de a par b) et le nombre r s'appelle le *reste*.

⚠ En Python, le quotient euclidien s'écrit `a // b` et le reste est `a % b`. On ne confondra pas `4.2 // 1.2` (le quotient euclidien, qui est *toujours* un entier et qui vaut ici 3) et `4.2 / 1.2` (le quotient « réel », ici 3,5).

3 Heures, minutes, secondes

Contrairement aux centimètres, les heures ne se divisent pas en dixièmes, centièmes ou millièmes d'heures (ce qui ferait des déciheures, des centiheures et des milliheures). À la place on utilise les *minutes* (soixante fois moins qu'une heure) et les *secondes* (soixante fois moins qu'une minute).

Les degrés fonctionnent de la même manière : un degré se divise en *minutes d'angle* (soixante fois moins qu'un degré), qui elles-mêmes se divisent en *secondes d'angle* (soixante fois moins qu'une minute).

Une heure (ou un degré) vaut donc $60 \times 60 = 3\,600$ secondes.

à connaître

Exemple 1. Convertir $3{,}680\,7\,\mathrm{h}$ en « heures, minutes et secondes ».

La partie entière donne le nombre d'heures : c'est 3. On multiplie « ce qui reste » par 60 pour avoir le nombre de minutes correspondant :

$$60 \times 0{,}680\,7 = 40{,}842.$$

La partie entière donne le nombre de minutes : c'est 40. Enfin, on multiplie (à nouveau) « ce qui reste » par 60 pour avoir le nombre de secondes :

$$60 \times 0{,}842 = 50{,}52.$$

Finalement $3{,}680\,7\,\mathrm{h} = 3\,\mathrm{h}\,40\,\mathrm{min}\,50{,}52\,\mathrm{s}$.

à connaître

Exemple 2. Convertir $15\,357\,\mathrm{s}$ en « heures, minutes et secondes ».

On effectue une première division euclidienne par 60. Le quotient donnera le nombre de minutes, et le reste le nombre de secondes :

$$15\,357 = 60 \times 255 + 57.$$

Puisque le nombre de minutes est supérieur à 60, on effectue une deuxième division euclidienne par 60. Le quotient donnera le nombre d'heures, et le reste le nombre définitif de minutes :

$$255 = 60 \times 4 + 15.$$

Finalement $15\,357\,\mathrm{s} = 4\,\mathrm{h}\,15\,\mathrm{min}\,57\,\mathrm{s}$. Remarque : si le nombre d'heures avait été supérieur à 24, on aurait pu continuer (en effectuant une division euclidienne par 24) pour avoir le nombre de jours entiers.

4 Fractions

Définitions (fraction, numérateur, dénominateur).

i) Le nombre $a \div b$ s'écrit aussi $\dfrac{a}{b}$.

ii) Dans une fraction, le nombre « du haut » (ici a) s'appelle le *numérateur* et le nombre « du bas » (ici b) s'appelle le *dénominateur*.

Autrement dit dans le symbole $\div$ on remplace le petit point du haut par le dividende et le petit point du bas par le diviseur. Lorsque le trait de fraction est horizontal (et *seulement* lorsqu'il est horizontal), il sous-entend des parenthèses :

$$\frac{3+2}{5\times 5} = \frac{(3+2)}{(5\times 5)}.$$

Ce qui n'est donc pas la même chose que

$$3 + 2 \div 5 \times 5$$

où l'ordre de priorité est $\div$, puis $\times$, et enfin $+$: nous y reviendrons dans la leçon **11**.

Propriété (multiplication d'une fraction par un nombre).
Quels que soient les nombres a, b et c, avec c différent de zéro, on a

$$a \times \frac{b}{c} = \frac{a \times b}{c} = \frac{a}{c} \times b.$$

Preuve. Il y a deux égalités : commençons par prouver celle de gauche. Le nombre $\dfrac{a \times b}{c} = (a \times b) \div c$ est par définition la solution de la multiplication à trou

$$c \times \boxed{} = a \times b.$$

Vérifions que $a \times \dfrac{b}{c}$ est aussi solution de cette multiplication à trou : cela prouvera qu'il est égal à $\dfrac{a \times b}{c}$. On a

$$c \times \boxed{a \times \frac{b}{c}} = c \times \left(a \times \frac{b}{c}\right) = c \times a \times \frac{b}{c} = a \times c \times \frac{b}{c} = a \times \left(c \times \frac{b}{c}\right),$$

or b/c est la solution de $c \times \boxed{} = b$, donc $c \times (b/c) = b$, ce qui permet de finir le calcul ci-dessus :

$$c \times \boxed{a \times \frac{b}{c}} = a \times \left(c \times \frac{b}{c}\right) = a \times b.$$

C'est bien ce qu'on voulait.
Et la deuxième égalité se démontre de la même manière. **C.Q.F.D.**

Propriété (simplification des fractions).
i) Quels que soient les nombres $a, a' \in \mathbf{R}$ et $b, b' \in \mathbf{R} - \{0\}$, on a

$$\frac{a \times a'}{b \times b'} = \frac{a}{b} \times \frac{a'}{b'}.$$

ii) (C'est un rappel !) Lorsqu'on divise un nombre par lui-même, on obtient toujours 1 : quel que soit $k \neq 0$ on a

$$\frac{k}{k} = 1.$$

iii) On peut donc *simplifier* une fraction, lorsque dans celle-ci un même nombre apparaît *en facteur* au numérateur et au dénominateur :

$$\frac{a \times k}{b \times k} = \frac{a}{b} \times \underbrace{\boxed{\frac{k}{k}}}_{=1} = \frac{a}{b}.$$

iv) Inversement, on peut *compliquer* une fraction en multipliant le numérateur et le dénominateur par un même nombre *différent de zéro* :

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{b} \times \underbrace{\boxed{\frac{k}{k}}}_{=1} = \frac{a \times k}{b \times k}.$$

Preuve de la règle i). On part du membre de droite, et on le multiplie par $(b \times b')$:

$$\boxed{\frac{a}{b} \times \frac{a'}{b'}} \times (b \times b').$$

Les parenthèses sont inutiles, et en plus on peut changer l'ordre dans lequel on multiplie :

$$\frac{a}{b} \times b \times \frac{a'}{b'} \times b'.$$

Mais d'après la propriété précédente, on a

$$\frac{a}{b} \times b = \frac{a \times b}{b} = a \times \underbrace{\boxed{\frac{b}{b}}}_{=1} = a \qquad \text{et} \qquad \frac{a'}{b'} \times b' = \frac{a' \times b'}{b'} = a' \times \underbrace{\boxed{\frac{b'}{b'}}}_{=1} = a'.$$

Finalement

$$\boxed{\frac{a}{b} \times \frac{a'}{b'}} \times (b \times b') = \frac{a}{b} \times b \times \frac{a'}{b'} \times b' = \left(\frac{a}{b} \times b\right) \times \left(\frac{a'}{b'} \times b'\right) = a \times a'.$$

Mais il s'agit là d'une multiplication à trou, dont la solution est par définition

$$\boxed{\frac{a}{b} \times \frac{a'}{b'}} = \frac{a \times a'}{b \times b'}.$$

C.Q.F.D.

Propriété (quotient de la division euclidienne).

i) Soient $a \in \mathbf{R}$ et $b \in \mathbf{R} - \{0\}$. La division euclidienne de a par b, à savoir $a = q \times b + r$ avec $0 \leqslant r < |b|$, s'écrit aussi

$$\frac{a}{|b|} = q + \frac{r}{|b|},$$

avec $0 \leqslant r/|b| < 1$.

ii) Autrement dit, le quotient q (dans la division euclidienne de a par b) est la partie entière de la fraction $a/|b|$. Ou pour ceux qui veulent une formule

$$q = \left\lfloor \frac{a}{|b|} \right\rfloor.$$

iii) Et bien sûr, une fois qu'on connaît q, le reste s'obtient avec la formule $r = a - q \times b$.

Il est essentiel de comprendre à quoi correspond, numériquement, la propriété *i)* ci-dessus. Par exemple, la division euclidienne de 27 par 4 s'écrit $27 = 6 \times 4 + 3$, c'est-à-dire

$$\frac{27}{4} = \frac{6 \times 4 + 3}{4} = \frac{6 \times 4}{4} + \frac{3}{4} = 6 \times \underbrace{\boxed{\frac{4}{4}}}_{=1} + \frac{3}{4} = 6 + \frac{3}{4},$$

correspond numériquement à

$$27 \div 4 = 6{,}75 = 6 + 0{,}75$$

puisque 0,75 est égal à $3 \div 4$ (c'est-à-dire à $3/4$).

Réciproquement, si l'on a calculé (par exemple) $67 \div 5 = 13{,}4$, on en déduit que dans la division euclidienne de 67 par 5, le quotient est $q = 13$ (c'est la partie entière de 13,4) et le reste est $r = 67 - 13 \times 5 = 2$.

Propriétés (addition, soustraction et comparaison des fractions).
On ne peut additionner, soustraire ou comparer des fractions *que* si elles ont le même dénominateur :
i) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{a'}{b} = \dfrac{a+a'}{b}$
ii) $\dfrac{a}{b} - \dfrac{a'}{b} = \dfrac{a-a'}{b}$
iii) Lorsque le dénominateur b est *positif*, les fractions $\dfrac{a}{b}$ et $\dfrac{a'}{b}$ sont *dans le même ordre* que leurs numérateurs.

Par exemple
$$\frac{4}{7} + \frac{7}{2} = \frac{4_{\times 2}}{7_{\times 2}} + \frac{7_{\times 7}}{2_{\times 7}} = \frac{8}{14} + \frac{49}{14} = \frac{57}{14}.$$
On verra comment trouver le dénominateur commun dans la leçon **4**.

5 Points aléatoires

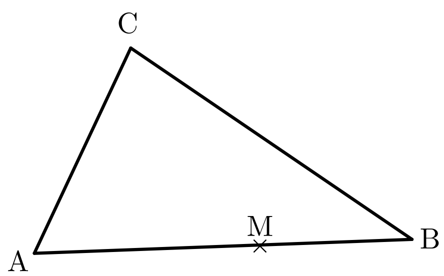
Commençons par voir comment choisir un point au hasard sur une figure géométrique, de manière « équitable ».

Définition (distribution uniforme).
i) Soit $\mathscr{L}$ une ligne de longueur finie. On dit qu'un point aléatoire de $\mathscr{L}$ a été *choisi selon la loi uniforme* lorsque la probabilité qu'il se trouve sur une certaine région de $\mathscr{L}$ est proportionnelle à la longueur de cette région.
ii) Soit $\mathscr{S}$ une surface d'aire finie. On dit qu'un point aléatoire de $\mathscr{S}$ a été *choisi selon la loi uniforme* lorsque la probabilité qu'il se trouve sur une certaine région de $\mathscr{S}$ est proportionnelle à l'aire de cette région.
iii) Soit $\mathscr{X}$ un solide de volume fini. On dit qu'un point aléatoire de $\mathscr{X}$ a été *choisi selon la loi uniforme* lorsque la probabilité qu'il se trouve dans une certaine région de $\mathscr{X}$ est proportionnelle au volume de cette région.

On remarquera que les trois définitions sont identiques : on doit juste utiliser la notion de longueur, d'aire ou de volume selon qu'on est sur un objet à une, deux ou trois dimensions.

Exemple sur une ligne.

On a un triangle ABC dont les côtés mesurent AB = 10 cm, BC = 9 cm et CA = 6 cm. On choisit un point M au hasard sur le bord de ce triangle, selon la loi uniforme. Quelle est la probabilité qu'il se trouve sur le côté [AB] ?



Commençons par calculer la longueur totale du bord du triangle (c'est-à-dire le périmètre) :

$$AB + BC + CA = 10\,\text{cm} + 9\,\text{cm} + 6\,\text{cm} = 25\,\text{cm}.$$

Puisque la distribution est uniforme, la probabilité que M se trouve sur [AB] est proportionnelle à la longueur de [AB] : on a un tableau de proportionnalité

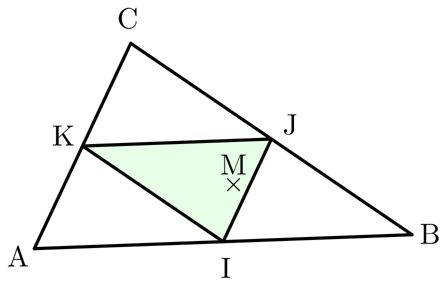
région	bord de ABC	le côté [AB]
longueur	25 cm	10 cm
probabilité que M s'y trouve	100 %	?

et on peut donc effectuer le produit en croix

$$\mathbf{P}(M \in [AB]) = \frac{10\,\text{cm} \times 100\,\%}{25\,\text{cm}} = \frac{10 \times 100}{25}\,\% = 40\,\%.$$

Exemple sur une surface.

On a toujours le même triangle. On note respectivement I, J et K les milieux des côtés [AB], [BC] et [CA]. On choisit cette fois-ci le point M au hasard *dans* le triangle. Quelle est la probabilité qu'il se trouve dans le « petit » triangle IJK ?



Les triangles AIK, BJI, CKJ et IJK sont superposables (nous le démontrerons dans la leçon **8**, avec le théorème de Thalès). Ils ont donc tous les quatre la même aire, ce qui veut dire que

$$\mathscr{A}_{ABC} = \mathscr{A}_{AIK} + \mathscr{A}_{BJI} + \mathscr{A}_{CKJ} + \mathscr{A}_{IJK} = 4 \times \mathscr{A}_{IJK}.$$

On en déduit que

$$\mathbf{P}(M \in IJK) = \frac{\mathscr{A}_{IJK}}{\mathscr{A}_{ABC}} = \frac{1}{4} = 25\,\%.$$

Remarque importante : nous n'avons pas eu besoin de calculer l'aire du triangle !