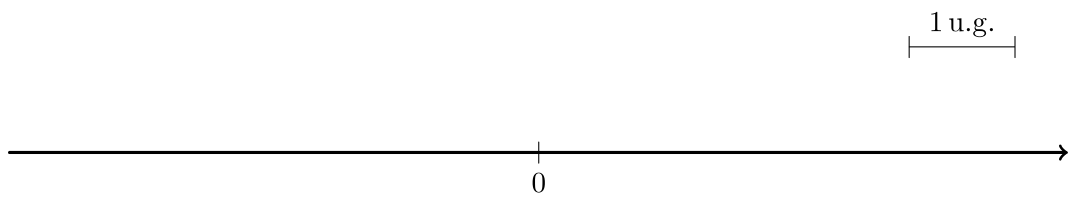
2$^{\text{nde}}$ générale & technologique — Mathématiques — Leçon 1

NOMBRES, ADDITIONS, SOUSTRACTIONS

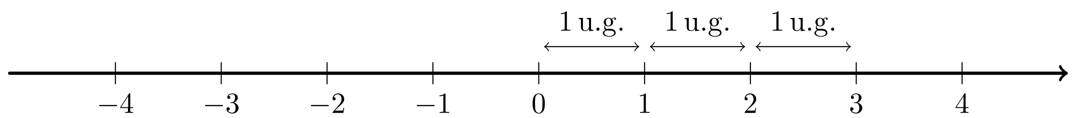
1 Nombres réels et droites graduées

Définition (nombres réels).
L'ensemble de tous les nombres qui existent s'appelle $\mathbf{R}$. Ses éléments sont les nombres *réels* (par opposition aux nombres *imaginaires*, qui n'existent pas, mais qu'on peut rencontrer en Terminale).

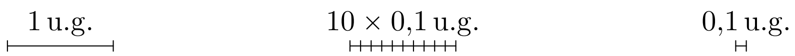
Pour représenter « graphiquement » les nombres, on utilise une *droite graduée*. Voici comment ça marche : on se donne une droite, un point sur cette droite (qu'on appelle l'*origine*), une longueur strictement positive (qu'on appelle l'*unité graphique* et qu'on note u.g.) et enfin un *sens* (qu'on matérialise par une petite flèche d'un « côté » de la droite). À l'origine, on écrit zéro.



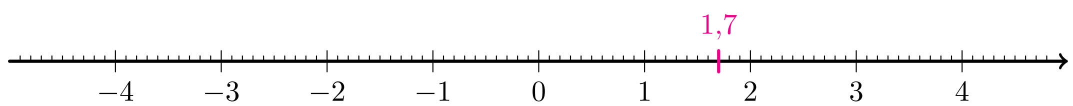
Ensuite, on ajoute des *graduations*. On reporte (par exemple avec un compas) la longueur 1 u.g., à partir de l'origine, et dans le sens indiqué par la flèche, une « infinité de fois », et sous chaque point obtenu, on écrit, dans l'ordre, les nombres 1, 2, 3, etc.. On fait pareil dans le sens *opposé* à la fléche, et sous chaque point obtenu on écrit les nombres -1, -2, -3, etc..



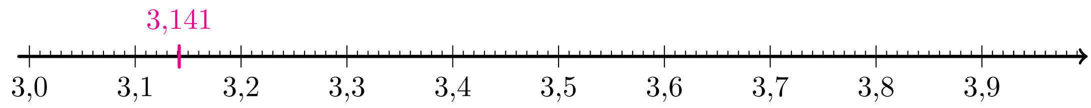
Pour placer les nombres à virgule, on a besoin de *subdiviser* la graduation.

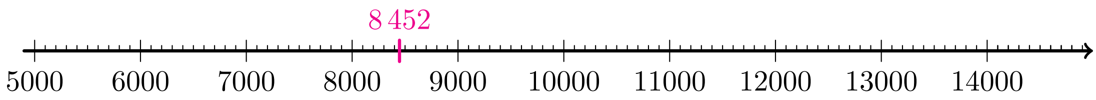


Plaçons par exemple 1,7. Évidemment, à la main, on ne dessine pas toutes les petites graduations !



Pour placer les très grandes ou les très petites valeurs, on utilise une *échelle* : c'est-à-dire que la graduation principale ne représente plus 1 u.g.. Voici deux exemples.





Définition (relation d'ordre sur les nombres).
Soient x et y deux nombres. Sur la droite graduée, si y se situe, par rapport à x, du côté indiqué par la flèche, on dit que y est *plus grand* que x. S'il est du côté *opposé* à la flèche, on dit que y est *plus petit* que x.

Soyons plus précis (selon qu'on accepte ou pas que x et y soient confondus sur la droite graduée). On dispose de six *opérateurs de comparaison* :

symbole	signification
$x = y$	x est égal à y
$x \neq y$	x est différent de y x n'est pas égal à y
$x < y$	x est (strictement) plus petit que y y est (strictement) plus grand que x
$x \leqslant y$	x est inférieur ou égal à y x n'est pas plus grand que y y est au moins égal à x y est supérieur ou égal à x
$x > y$	y est (strictement) plus petit que x x est (strictement) plus grand que y
$x \geqslant y$	y est inférieur ou égal à x y n'est pas plus grand que x x est au moins égal à y x est supérieur ou égal à y

Insistons sur deux points. Premièrement $x \leqslant y$ et $y \geqslant x$ veulent dire la même chose. Tout comme $x < y$ et $y > x$. Deuxièmement le *contraire* de $x \leqslant y$ est $x > y$ (et le contraire de $x \geqslant y$ est $x < y$).

Propriétés (de la relation d'ordre sur les nombres).
Quels que soient les nombres x, y et z on a

i) $x \leqslant x$,

ii) si $x \leqslant y$ et $y \leqslant x$ alors $x = y$,

iii) si $x \leqslant y$ et $y \leqslant z$, alors $x \leqslant z$,

iv) on est toujours dans l'un des trois cas suivants : soit $x < y$, soit $x = y$, soit $x > y$.

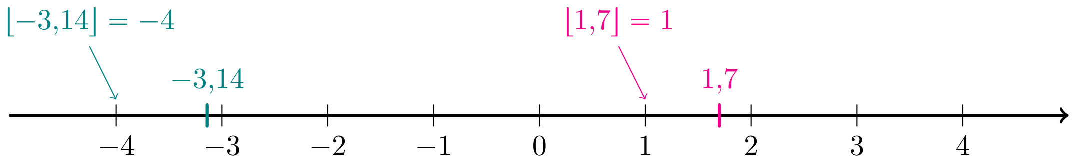
② Nombres entiers, parties entières, troncatures et arrondis

Définition (entiers relatifs).
L'ensemble $\{\dots\,;\,-3\,;\,-2\,;\,-1\,;\,0\,;\,1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,\dots\}$ s'appelle $\mathbf{Z}$. Ses éléments sont les *nombres entiers* (ou les *entiers relatifs*), il y en a une infinité.

Les nombres entiers sont donc ceux qui apparaissent sur la droite graduée, *lorsqu'on utilise l'unité graphique comme graduation* (et pas une échelle plus petite ou plus grande). La lettre $\mathbf{Z}$ est la première du mot allemand *Zahl*, qui veut dire « nombre ».

Définition (partie entière).
La *partie entière* du nombre x est le plus grand nombre entier inférieur ou égal à x. On la note $\lfloor x \rfloor$.

Il s'agit donc de la graduation immédiatement *avant* x sur la droite graduée. Attention, pour les nombres négatifs, ça fait un truc bizarre.



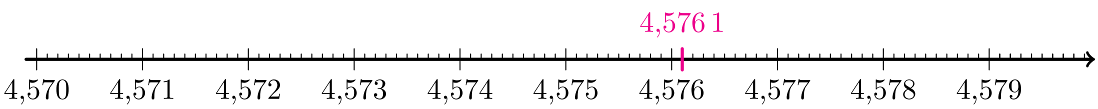
Propriétés (de la partie entière).
Quel que soit le nombre x on a

i) $\lfloor x \rfloor = x$ si et seulement si $x \in \mathbf{Z}$,

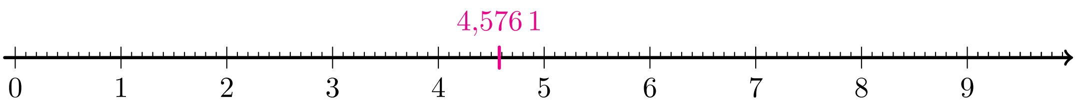
ii) si $x \notin \mathbf{Z}$ alors $\lfloor x \rfloor < x < \lfloor x \rfloor + 1$,

iii) dans tous les cas $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$.

La partie entière sert à faire des *troncatures* : on y revidendra plus tard, dans la leçon **13**. Pour l'instant mentionnons juste la notion d'*arrondi*. Prenons un nombre, disons 4,576 1. Pour l'arrondir, disons, au millième près, on doit le placer sur une droite graduée avec une échelle de 0,001. L'arrondi est alors le nombre correspondant à la graduation la plus proche.



L'arrondi au millième près est donc 4,576. Deuxième exemple : le même nombre 4,576 1, mais qu'on veut arrondir à l'entier près. On doit donc cette fois graduer avec l'échelle 1.



L'arrondi à l'entier près est donc 5 (car on est un peu plus près de 5 que de 4). Dans la situation (rare) où l'on tombe *exactement au milieu* entre deux graduations, la convention la plus répandue est d'arrondir *par excès*, c'est-à-dire choisir la graduation qui vient *après*.

3 Addition et soustraction, nombres positifs et négatifs

Définition (nombres positifs).
L'ensemble des nombres qui servent à *mesurer* les grandeurs physiques s'appelle $\mathbf{R}_+$. Ses éléments sont les *nombres positifs*.

Voici des exemples de *grandeurs physiques* : durée, longueur, aire, volume, masse, vitesse, accélération, température, pression, etc.. Il faut comprendre qu'il y en a deux sortes : celles qui s'ajoutent, et celles qui ne s'ajoutent pas.

Commençons par celles qui s'ajoutent : les durées, les longueurs, les aires, les volumes, les masses, etc.. Si on met ensemble deux objets de 1 kg, on obtient en tout $1\,\mathrm{kg} + 1\,\mathrm{kg} = 2\,\mathrm{kg}$. Les grandeurs qui s'ajoutent sont appelées *extensives*.

Ensuite voyons celles qui ne s'ajoutent pas : les vitesses, les températures, les pressions, etc.. Si deux voitures, roulant chacune à 30 km/h, sont accrochées à une même remorque pour la déplacer, alors cette remorque se déplacera elle aussi à 30 km/h (et pas à $30\,\mathrm{km/h} + 30\,\mathrm{km/h} = 60\,\mathrm{km/h}$). Les grandeurs qui ne s'ajoutent pas sont appelées *intensives*.

à connaître

Exemple. On met ensemble $1\,\ell$ d'eau à 293 K (soit à peu près 20 °C) et $2\,\ell$ d'eau à 293 K.
i) Le volume est une grandeur *extensive* donc on obtient en tout $1\,\ell + 2\,\ell = 3\,\ell$ d'eau.
ii) En revanche la température est une grandeur *intensive* donc ces $3\,\ell$ d'eau seront toujours à 293 K.

Propriétés (de l'addition).
Quels que soient les nombres x, y et z on a
i) $0 + x = x + 0 = x$,
ii) $x + y = y + x$ (dans une addition l'ordre des termes n'a pas d'importance),
iii) $x + (y + z) = (x + y) + z = x + y + z$ (dans un calcul qui ne contient *que* des additions, les parenthèses sont inutiles, on peut donc les enlever ou bien en ajouter où l'on veut).

Les nombres positifs sont des cas particuliers de nombres réels, ce qu'on écrit $\mathbf{R}_+ \subseteq \mathbf{R}$. Nous allons maintenant élucider une question importante : pourquoi n'y a-t-il pas *que* les nombres positifs ? Parce qu'en physique, on ne fait pas qu'exprimer des *grandeurs*, on souhaite également exprimer des *différences* (on dit aussi des *écarts*). Commençons par définir la soustraction.

Définition (soustraction).
L'opération qui résout une addition « à trou »

$$12{,}5 + \boxed{} = 27{,}3 \qquad \text{ou} \qquad \boxed{} + 12{,}5 = 27{,}3$$

s'appelle la *soustraction*. Son résultat s'appelle la *différence* (ici de 27,3 et de 12,5) et se note $27{,}3 - 12{,}5$.

Des exemples en physique, comme promis : la *tension électrique* (c'est une différence de potentiels : la tention mesurée entre les points A et B d'un circuit est $\mathrm{U} = \mathrm{V_B} - \mathrm{V_A}$), l'énergie (dont on fait des bilans : $\Delta\mathrm{E} = \mathrm{E_{finale}} - \mathrm{E_{initiale}}$, dans un système *conservatif* on a $\Delta\mathrm{E} = 0$), et les écarts de température ($\Delta\mathrm{T} = \mathrm{T_{finale}} - \mathrm{T_{initiale}}$, pour voir si ça se réchauffe ou si ça se refroidit).

Restons avec l'exemple des écarts de température, et considérons le cas $\mathrm{T_{initiale}} = 27{,}3\,°\mathrm{C}$ et $\mathrm{T_{finale}} = 12{,}5\,°\mathrm{C}$. Si l'on n'a que les nombres positifs, on ne peut pas résoudre

$$27{,}3 + \boxed{} = 12{,}5$$

parce que 12,5 est plus petit que 27,3. Il faut donc *enlever* quelque chose, et c'est ce à quoi servent les nombres négatifs.

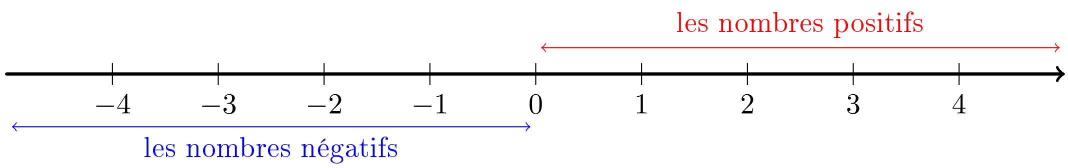
Définitions (opposé, nombres négatifs).
i) La solution de l'addition à trou

$$4{,}5 + \boxed{} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \boxed{} + 4{,}5 = 0$$

s'appelle l'*opposé* (ici de 4,5). On la note avec un $-$ devant le nombre (donc ici $-4{,}5$). C'est un cas particulier de soustraction, puisque $-4{,}5$ est par définition la même chose que $0 - 4{,}5$.
ii) Les nombres *négatifs* sont les opposés des nombres positifs. Leur ensemble s'appelle $\mathbf{R}_-$.

Chacune des deux définitions mérite un instant d'attention. La première implique que le signe $-$ a deux significations différentes, selon le contexte : il peut indiquer une *soustraction*, ou bien un *opposé*. La deuxième peut s'exprimer comme une équivalence : « un nombre est négatif si et seulement si son opposé est positif ».

Le nombre 0 partage la droite graduée en deux moitiés : d'un côté il y a les nombres *positifs* (c'est le côté indiqué par la flèche) et de l'autre il y a les nombres *négatifs*.



Ainsi, lorsqu'on regroupe les nombres positifs et les nombres négatifs, on obtient *tous* les nombres : ce qu'on écrit

$$\mathbf{R}_+ \cup \mathbf{R}_- = \mathbf{R}.$$

D'autre part, « a est positif » est la même chose que « $0 \leqslant a$ » (et « a est négatif » est la même chose que « $a \leqslant 0$ »). Le nombre 0 a un statut particulier : il est à la fois positif et négatif, et c'est le seul dans ce cas, ce qu'on écrit

$$\mathbf{R}_+ \cap \mathbf{R}_- = \{0\}\,.$$

En particulier, il est faux de dire : « les nombres négatifs sont ceux qui s'écrivent avec un signe $-$ », puisque 0 *est négatif même quand on n'écrit pas un* $-$ *devant*. Plus généralement, si $a = -3$, alors $-a$ est positif bien qu'il s'écrive avec un $-$ (parce que $-a = -(-3) = 3$, c'est la propriété qui arrive).

Propriétés (des soustractions et des opposés).
i) L'opposé de 0 est 0 lui-même. C'est le seul nombre qui est égal à son opposé.
ii) L'opposé de l'opposé est le nombre de départ : quel que soit le nombre x, on a $-(-x) = x$.
iii) Dans un calcul, les parenthèses *avant* un signe $-$ sont inutiles, on peut donc les enlever :

$$(4 + 3 - 2 \times 5) - (5 + 7 - 2 \times 2 - 4) = 4 + 3 - 2 \times 5 - (5 + 7 - 2 \times 2 - 4).$$

iv) On peut enlever les parenthèses *après* un signe $-$ à condition de changer, dans celles-ci, tous les $-$ en $+$ et tous les $+$ en $-$:

$$(4 + 3 - 2 \times 5) - (5 + 7 - 2 \times 2 - 4) = (4 + 3 - 2 \times 5) - 5 - 7 + 2 \times 2 + 4.$$

Preuve de la règle ii). Par définition, $-(-x)$ (c'est-à-dire l'opposé de $-x$) est la solution de l'addition à trou

$$(-x) + \boxed{} = 0.$$

Effectuons un petit calcul :

$$\begin{aligned}(-x)+x &\overset{\text{dans une addition l'ordre des termes n'a pas d'importance}}{\overset{\downarrow}{=}} x+(-x)\\ &\overset{\text{car } (-x) \text{ est l'opposé de } x}{\overset{\downarrow}{=}} 0.\end{aligned}$$

Ainsi x est la solution de l'opération à trou ci-dessus (parce que lorsqu'on place x dans le trou, l'égalité est vraie !), c'est donc bien l'opposé de $-x$. **C.Q.F.D.**

4 Les entiers naturels

Définition (entiers naturels).
L'ensemble $\{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; \ldots\}$ s'appelle $\mathbf{N}$. Ses éléments sont les *entiers naturels*, il y en a une infinité.

Les entiers naturels sont des cas particuliers de nombres réels, ce qu'on écrit $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{R}$. Ce sont les nombres qui servent à *compter* (le nombre d'objets dans une collection, le nombre de personnes dans un groupe, le nombre de cas dans une situation, etc.).

Définition (multiplication par un entier naturel).
Soit $n \in \mathbf{N}$ et soit $x \in \mathbf{R}$. Le résultat de l'addition « itérée »

$$\underbrace{x+x+x+x+\ldots+x}_{\text{avec } n \text{ fois le } x}$$

se note $n \times x$.

Propriétés.
Quels que soient $m, n \in \mathbf{N}$ et $x, y \in \mathbf{R}$ on a

i) $0 \times x = 0$,

ii) $1 \times x = x$,

iii) $(m+n) \times x = (m \times x) + (n \times x)$,

iv) $n \times (x+y) = (n \times x) + (n \times y)$.

Preuve de la règle iv). On part du membre de gauche :

$$\begin{aligned}n \times (x+y) &\overset{\text{déf.}}{\overset{\downarrow}{=}} \underbrace{(x+y)+(x+y)+(x+y)+\ldots+(x+y)}_{\text{avec } n \text{ fois le } (x+y)}\\ &\overset{\text{dans une addition les parenthèses sont inutiles}}{\overset{\downarrow}{=}} \underbrace{x+y+x+y+x+y+\ldots+x+y}_{\text{avec } n \text{ fois } x+y}\\ &\overset{\text{dans une addition l'ordre des termes n'a pas d'importance}}{\overset{\downarrow}{=}} \underbrace{x+x+x+\ldots+x}_{n \text{ fois le } x}+\underbrace{y+y+y+\ldots+y}_{n \text{ fois le } y}\end{aligned}$$

$$\overset{\text{dans une addition on peut ajouter des parenthèses}}{\overset{\downarrow}{=}} \quad (\underbrace{x + x + x + \ldots + x}_{n \text{ fois le } x}) + (\underbrace{y + y + y + \ldots + y}_{n \text{ fois le } x})$$

$$\overset{\text{déf.}}{\overset{\downarrow}{=}} \quad (n \times x) + (n \times y).$$

C.Q.F.D.

5 Aires des figures planes

L'*aire* est une notion géométrique qui associe à certaines parties du plan un nombre positif, souvent représenté par la lettre $\mathscr{A}$. Petit point de vocabulaire : la *surface* est l'objet, l'*aire* est la grandeur qui lui est associée.

objet géométrique	**grandeur associée**
ligne	longueur
surface	aire
solide	volume

Propriétés (des aires).

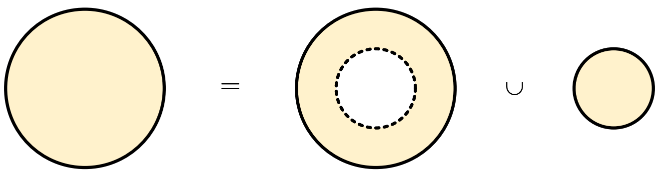
i) L'aire de la partie vide est nulle : $\mathscr{A}_\varnothing = 0$. Attention, d'autres parties ont une aire égale à zéro : les segments, les cercles (un *cercle* étant la ligne qui délimite un *disque*), etc..

ii) L'aire est une notion *croissante* : si $\mathscr{X} \subseteq \mathscr{Y}$ alors $\mathscr{A}_\mathscr{X} \leqslant \mathscr{A}_\mathscr{Y}$.

iii) L'aire est une notion *additive* : si $\mathscr{X}$ et $\mathscr{Y}$ sont deux parties *disjointes* alors $\mathscr{A}_{\mathscr{X}\cup\mathscr{Y}} = \mathscr{A}_\mathscr{X} + \mathscr{A}_\mathscr{Y}$. Cela se généralise évidemment à un nombre quelconque de morceaux.

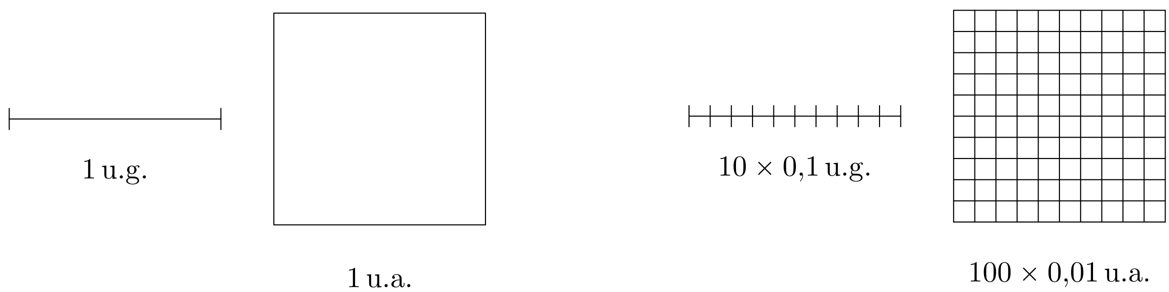
iv) Les translations, les rotations et les réflexions préservent les aires. Autrement dit : déplacer ou retourner une figure ne change pas son aire. En particulier, deux figures superposables ont la même aire.

Évidemment, la propriété *iii*) peut aussi s'écrire avec des soustractions : si l'on enlève un morceau $\mathscr{X}$ d'une figure $\mathscr{Y}$, on obtient deux parties disjointes $\mathscr{X}$ et $\mathscr{Y} - \mathscr{X}$

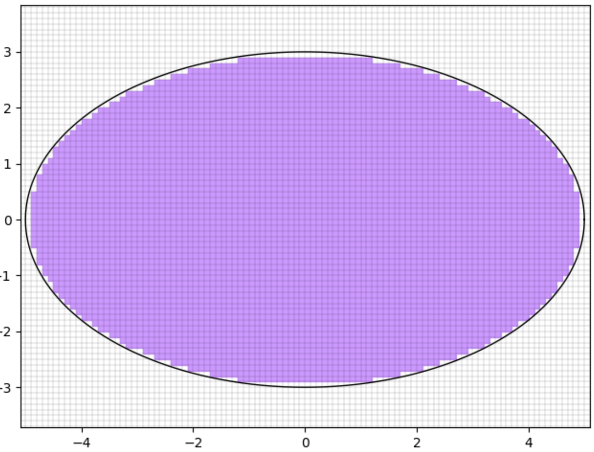


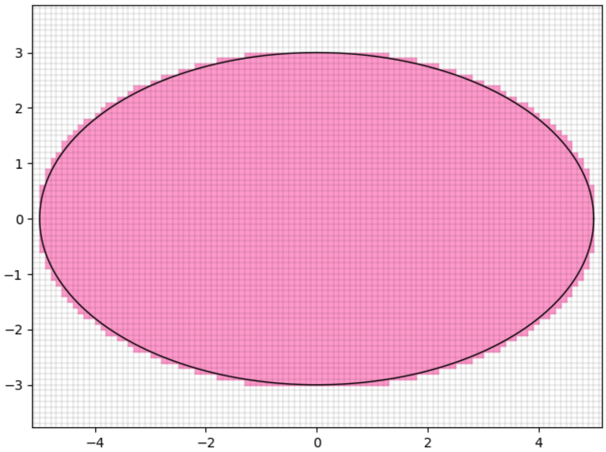
dont la réunion est $\mathscr{Y}$. Ainsi $\mathscr{A}_\mathscr{Y} = \mathscr{A}_{\mathscr{Y}-\mathscr{X}} + \mathscr{A}_\mathscr{X}$, c'est-à-dire $\mathscr{A}_{\mathscr{Y}-\mathscr{X}} = \mathscr{A}_\mathscr{Y} - \mathscr{A}_\mathscr{X}$. Dans l'exemple ci-dessus, on calcule l'aire de l'anneau en soustrayant l'aire du grand disque et celle du petit disque.

Pour *mesurer* l'aire d'une figure, on a besoin d'une référence : c'est l'*unité d'aire*. Si l'on dispose déjà d'une unité graphique pour mesurer les longueurs, alors on prend comme unité d'aire un carré de côté égal à l'unité graphique. Attention : si l'on subdivise en 10 l'unité graphique, cela subdivise en 100 l'unité d'aire.



On peut alors *minorer* l'aire d'une figure en cherchant à la remplir, le mieux possible, avec des petits carrés ; et *majorer* l'aire en essayant de recouvrir la figure. Et ainsi obtenir un encadrement. Voyons cette méthode avec une ellipse.

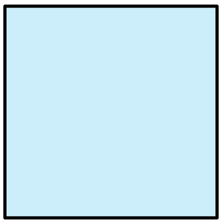


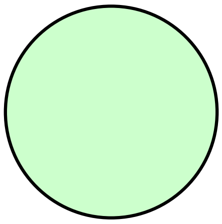


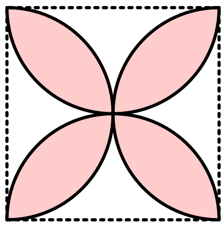
On trouve (avec Python, qui a d'ailleurs aussi fait les dessins : on apprendra comment plus tard) 4 536 petits carrés à l'intérieur et 4 848 pour recouvrir entièrement. Chacun à une aire de 0,01 u.g. donc on obtient l'encadrement $45{,}36\,\text{u.g.} < \mathscr{A}_{\text{ellipse}} < 48{,}48\,\text{u.g.}$.

6 Exemple de calcul d'aire par découpage et recollement

On demande de calculer l'aire de la fleur rouge, à droite ci-dessous. Petite illusion d'optique : le disque au milieu a l'air plus petit, mais son diamètre est égal au côté du carré.

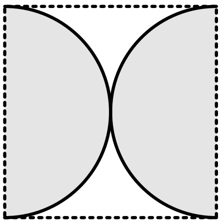


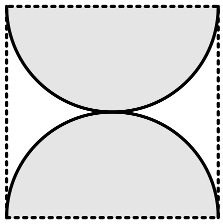




$\mathscr{A}_{\color{cyan}\blacksquare} = 16\,\text{cm}^2$ $\mathscr{A}_{\color{green}\blacksquare} \simeq 12{,}57\,\text{cm}^2$ $\mathscr{A}_{\color{pink}\blacksquare} = \ ?$

Voici une manière (parmi d'autres) de trouver la réponse. Commençons par calculer l'aire de la partie « blanche » de la dernière figure. Le morceau du haut et du bas, ensemble, représentent $\mathscr{A}_{\color{cyan}\blacksquare} - \mathscr{A}_{\color{green}\blacksquare}$. Ceux de gauche et de droite représentent également $\mathscr{A}_{\color{cyan}\blacksquare} - \mathscr{A}_{\color{green}\blacksquare}$. On le voit sur ces petits dessins.





Ainsi les quatre petits bouts blancs valent $\mathscr{A}_{\square} = (\mathscr{A}_{\color{cyan}\blacksquare} - \mathscr{A}_{\color{green}\blacksquare}) + (\mathscr{A}_{\color{cyan}\blacksquare} - \mathscr{A}_{\color{green}\blacksquare}) = 2 \times \mathscr{A}_{\color{cyan}\blacksquare} - 2 \times \mathscr{A}_{\color{green}\blacksquare}$. Et nous en déduisons l'aire de la partie rouge

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}_{\color{pink}\blacksquare} &= \mathscr{A}_{\color{cyan}\blacksquare} - \mathscr{A}_{\square} \\
&= \mathscr{A}_{\color{cyan}\blacksquare} - (2 \times \mathscr{A}_{\color{cyan}\blacksquare} - 2 \times \mathscr{A}_{\color{green}\blacksquare}) \\
&= \mathscr{A}_{\color{cyan}\blacksquare} - 2 \times \mathscr{A}_{\color{cyan}\blacksquare} + 2 \times \mathscr{A}_{\color{green}\blacksquare} \\
&= 2 \times \mathscr{A}_{\color{green}\blacksquare} - \mathscr{A}_{\color{cyan}\blacksquare} \\
&\simeq 2 \times 12{,}57\,\text{cm}^2 - 16\,\text{cm}^2 \\
&\simeq 9{,}13\,\text{cm}^2.
\end{aligned}$$