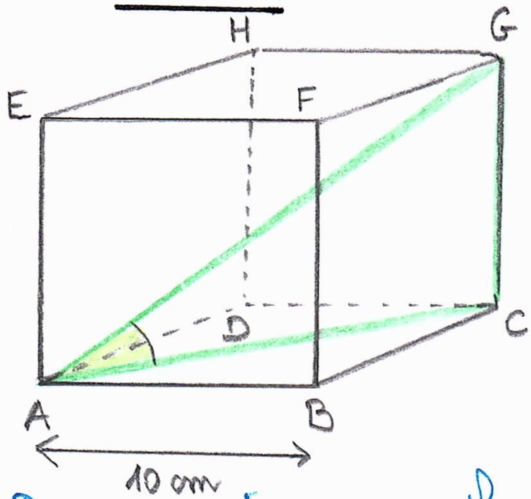
Leçon 78 : Exemples de calculs de longueurs et d'angles (dans l'espace !)

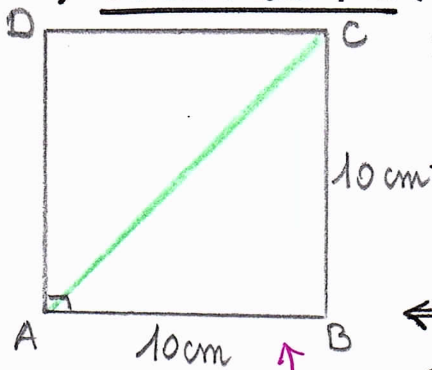
① Le cube



Pour faire des calculs dans l'espace, on se ramène à des situations planes.

Dans un pavé, on nomme les sommets dans le même ordre sur la face inférieure et la face supérieure.

a) Calcul de AC. ← la « petite » diagonale

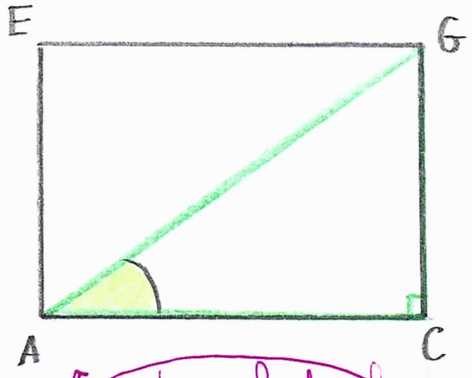


on dessine la face inférieure.

Dans le triangle ABC rectangle en B, le théorème de Pythagore s'écrit

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$
$$\Leftrightarrow 10^2 + 10^2 = AC^2$$
$$\Leftrightarrow 200 = AC^2$$
$$\Leftrightarrow AC = \sqrt{200} \simeq \underline{14{,}1\text{ cm}}.$$

b) Calcul de AG. ← la « grande » diagonale



on dessine la tranche diagonale

Dans le triangle ACG rectangle en C, le théorème de Pythagore s'écrit

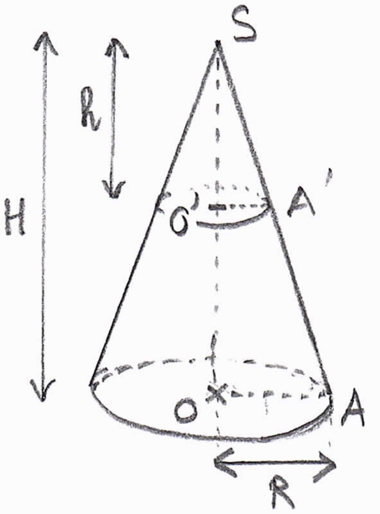
$$AC^2 + CG^2 = AG^2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{200}\right)^2 + 10^2 = AG^2$$
$$\Leftrightarrow 300 = AG^2$$
$$\Leftrightarrow AG = \sqrt{300} \simeq \underline{17{,}3\text{ cm}}.$$

c) Calcul de l'angle $\widehat{CAG}$.

$$\cos\left(\widehat{CAG}\right) = \frac{AC}{AG} \Leftrightarrow \text{mes}\left(\widehat{CAG}\right) = \arccos\left(\frac{AC}{AG}\right) = \arccos\left(\frac{\sqrt{200}}{\sqrt{300}}\right)$$
$$\text{mes}\left(\widehat{CAG}\right) \simeq \underline{35{,}26°}.$$

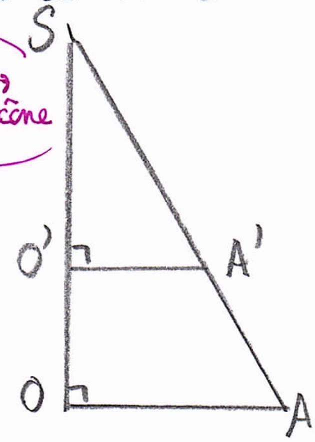
Propriété : plus généralement si le côté du cube est a, alors la petite diagonale mesure $a \times \sqrt{2}$ et la grande $a \times \sqrt{3}$. L'angle $\widehat{CAG}$ ne dépend pas de a : il vaut toujours $\arccos\left(\frac{a\times\sqrt{2}}{a\times\sqrt{3}}\right) = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) \simeq 35{,}26°$.

② Le cône



Problème : on coupe un petit cône (de hauteur h) dans un grand (de hauteur H). Comment choisir h pour que le petit cône ait pour volume la moitié du grand ?

on dessine la «coupe» du cône



a) Calcul de O'A'.

C'est une situation de Thalès !

$$\frac{SO'}{SO} = \frac{O'A'}{OA} \Leftrightarrow \frac{h}{H} = \frac{O'A'}{R}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{O'A' = R \times \frac{h}{H}}$$

b) Calcul des volumes.

Pour un cône : $V = \frac{1}{3} \times B \times h$. Pour le grand : $B = \pi \times R^2$ donc $V_{grand} = \frac{1}{3} \times \pi \times R^2 \times H$.

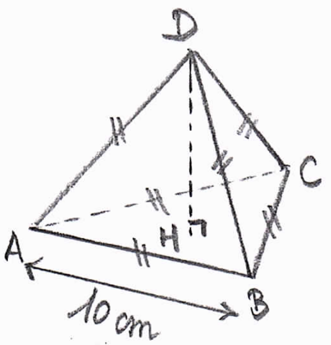
Et pour le petit : $B = \pi \times O'A'^2 = \pi \times \left(R \times \frac{h}{H}\right)^2$ donc $V_{petit} = \frac{1}{3} \times \pi \times \left(R \times \frac{h}{H}\right)^2 \times h$.

c) Conclusion : $\frac{V_{petit}}{V_{grand}} = 1/2 \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{3} \times \pi \times R^2 \times \frac{h^2}{H^2} \times h}{\frac{1}{3} \times \pi \times R^2 \times H} = 1/2 \Leftrightarrow \frac{h^3}{H^3} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{h}{H} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$.

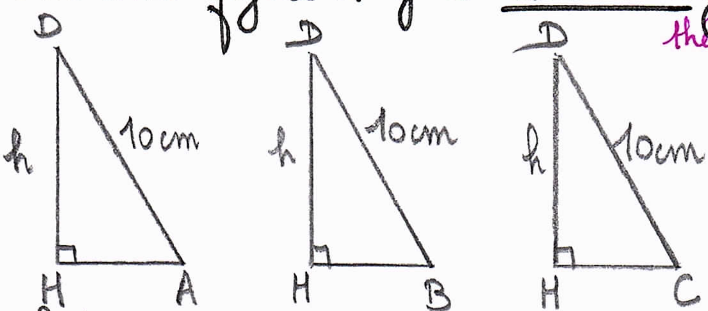
Il faut donc choisir $\boxed{h = H \times \sqrt[3]{\frac{1}{2}}}$. Ex : $H = 10\text{cm} \Rightarrow h \approx 10 \times 0{,}7937 \simeq 7{,}937\text{cm}$.

③ Le tétraèdre régulier

Problème : si son côté vaut 10 cm, calculer sa hauteur.



a) Dans cette figure il y a trois triangles superposables :



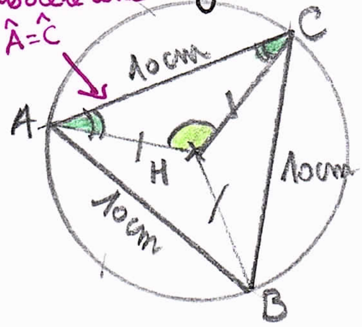
théorème de Pythagore !

- $h^2 + HA^2 = 10^2$
  $HA = \sqrt{100 - h^2}$
- $h^2 + HB^2 = 10^2$
  $HB = \sqrt{100 - h^2}$
- $h^2 + HC^2 = 10^2$
  $HC = \sqrt{100 - h^2}$

donc $HA = HB = HC$ et les triangles sont semblables !

b) On regarde la face inférieure :

isocèle donc $\hat{A} = \hat{C}$



Puisque $HA = HB = HC$ les triangles HAC, HCB et HBA sont aussi superposables. Donc mes$(\widehat{AHC}) = 360° \div 3 = 120°$.

Loi des sinus : $\frac{\sin \hat{C}}{AH} = \frac{\sin \hat{H}}{AC} \Leftrightarrow \frac{\sin 30°}{AH} = \frac{\sin 120°}{10} \Leftrightarrow AH = 10 \times \frac{\sin 30°}{\sin 120°} = \frac{10}{\sqrt{3}}$.

Et finalement $h^2 + HA^2 = 10^2 \Rightarrow h^2 + \left(\frac{10}{\sqrt{3}}\right)^2 = 10^2 \Rightarrow h^2 = 100 - \frac{100}{3} = \frac{200}{3}$

on réutilise la formule du a)

$\boxed{h = \sqrt{200/3}}$