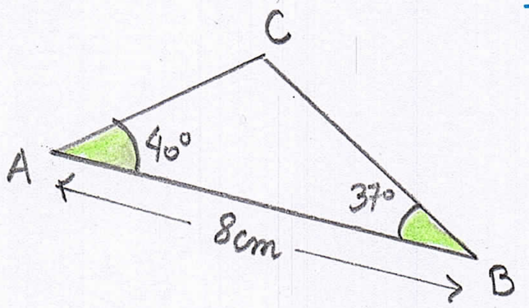
Leçon 75 : Résolution des triangles

Dans un triangle il y a trois côtés et trois angles. Ce qui fait six informations en tout. <u>Résoudre un triangle</u> consiste, connaissant trois informations, à trouver les trois autres.

① On connaît un angle et le côté opposé

Dans ce cas on utilise la <u>loi des sinus</u>.

a)



→ Il n'est pas écrit, mais on <u>connaît $\hat{C}$</u> :

$mes(\hat{C}) = 180° - 40° - 37° = \underline{103°}$.

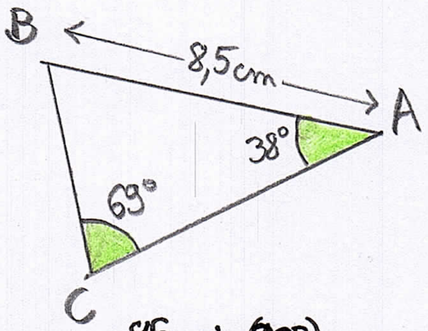
→ Loi des sinus :

sin(40°)	sin(37°)	sin(103°)
BC	AC	8

est un tableau de proportionnalité

donc : $BC = \dfrac{8 \times \sin(40°)}{\sin(103°)} \simeq \underline{5{,}3 \text{ cm}}$ et $AC = \dfrac{8 \times \sin(37°)}{\sin(103°)} \simeq \underline{4{,}9 \text{ cm}}$.

b)



Idem $mes(\hat{B}) = 180° - 69° - 38° = 73°$

sin(38°)	sin(73°)	sin(69°)
BC	AC	8,5cm

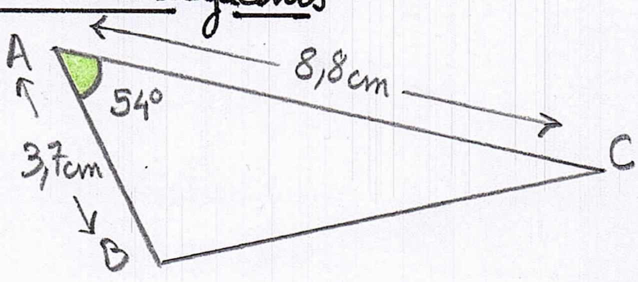
est un tableau de proportionnalité

donc : $BC = \dfrac{8{,}5 \times \sin(38°)}{\sin(69°)} \simeq \underline{5{,}6 \text{ cm}}$ et $AC = \dfrac{8{,}5 \times \sin(73°)}{\sin(69°)} \simeq \underline{8{,}7 \text{ cm}}$.

② On connaît un angle et les deux côtés adjacents

Alors on utilise la <u>loi du cosinus</u>.

→ on obtient alors le troisième côté, et on détermine les angles manquants avec la loi des sinus.



$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\hat{A})$$

$$= 3{,}7^2 + 8{,}8^2 - 2 \times 3{,}7 \times 8{,}8 \times \cos(54°) \simeq 52{,}85$$

$BC \simeq \underline{7{,}3 \text{ cm}}$. on prend la racine carrée

Puis

$\sin(54°)$	$\sin(\hat{B})$	$\sin(\hat{C})$
7,3	8,8	3,7

est un tableau de proportionnalité

donc $\sin(\hat{B}) \simeq \dfrac{8{,}8 \times \sin(54°)}{7{,}3}$

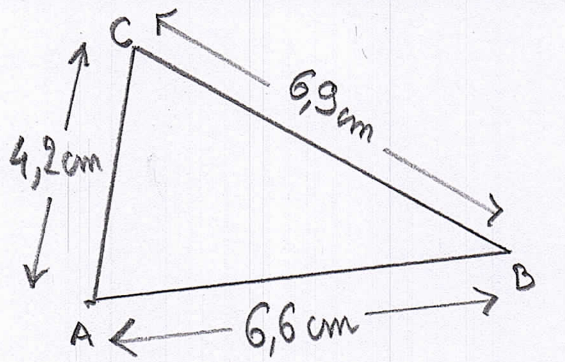
$$\text{mes}(\hat{B}) \simeq \arcsin\left(\frac{8{,}8 \times \sin(54°)}{7{,}3}\right)$$

$$\simeq \underline{77{,}23°}.$$

Enfin $\text{mes}(\hat{C}) = 180° - 54° - 77{,}23° \simeq \underline{48{,}77°}$.

③ On connaît les trois côtés

Dans ce cas on utilise la loi du cosinus « à l'envers ».



$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\hat{A})$$

$$\Leftrightarrow BC^2 - AB^2 - AC^2 = -2 \times AB \times AC \times \cos(\hat{A})$$

$$\Leftrightarrow \frac{BC^2 - AB^2 - AC^2}{-2 \times AB \times AC} = \cos(\hat{A})$$

on simplifie un peu les signes dans la fraction

$$\Leftrightarrow \boxed{\text{mes}(\hat{A}) = \arccos\left(\frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \times AB \times AC}\right)}$$

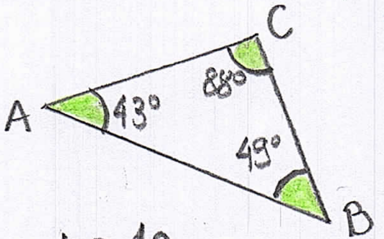
Ici : $\text{mes}(\hat{A}) = \arccos\left(\dfrac{6{,}6^2 + 4{,}2^2 - 6{,}9^2}{2 \times 6{,}6 \times 4{,}2}\right) \simeq \underline{75{,}81°}$.

→ Pour les deux angles restants on a le choix : soit on refait la même formule, soit on utilise la loi des sinus.

④ On connaît les trois angles (plus difficile)

Changer d'échelle ne modifie pas les angles : sans information supplémentaire, on ne peut rien dire.

Ex : on connaît en plus le périmètre. On choisit un côté comme inconnue et on utilise la loi des sinus. Disons $AB = x$.



$p = 10$ cm

$\sin(43°)$	$\sin(49°)$	$\sin(88°)$
BC	AC	x

$$BC = x \times \frac{\sin(43°)}{\sin(88°)} \simeq 0{,}68x$$

$$AC = x \times \frac{\sin(49°)}{\sin(88°)} \simeq 0{,}76x$$

mais $10 = AB + BC + AC$

le périmètre est la somme des côtés

$\simeq 1x + 0{,}68x + 0{,}76x \simeq 2{,}44x$

$\Rightarrow x \simeq 10 \div 2{,}44 \simeq 4{,}1 \text{ cm}$ c'est AB

puis $BC \simeq 0{,}68 \times 4{,}1 \simeq 2{,}8$ cm

$AC \simeq 0{,}76 \times 4{,}1 \simeq 3{,}1$ cm.