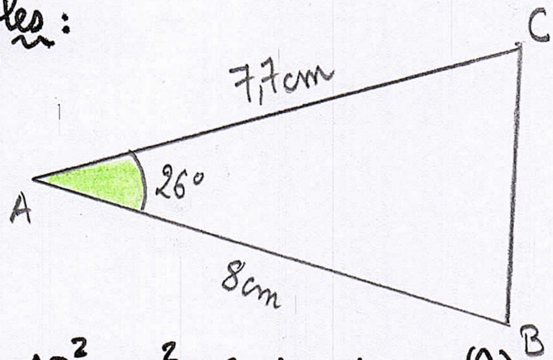
LEÇON 74 : FORMULE D'AL-KASHI

① Énoncé et exemples

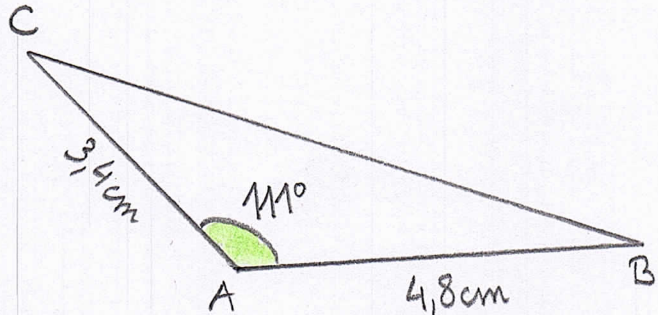
THÉORÈME (LOI DU COSINUS OU FORMULE D'AL-KASHI) Soit ABC un triangle quelconque. Alors $\boxed{BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\hat{A})}$.

Remarque : si $\hat{A}$ est droit alors $\cos(\hat{A}) = 0$ et on retrouve la formule de Pythagore. Il s'agit donc d'un « théorème de Pythagore généralisé ».

Exemples :



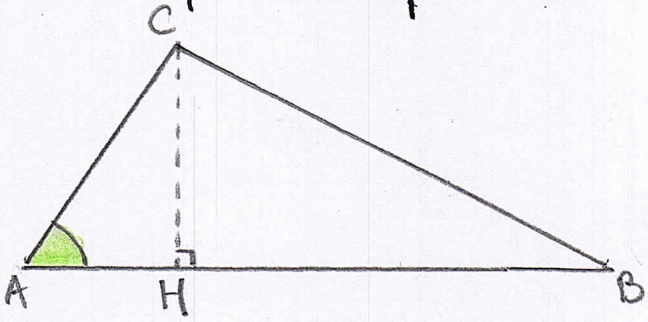
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\hat{A})$$
$$= 8^2 + 7{,}7^2 - 2 \times 8 \times 7{,}7 \times \cos(26°)$$
$$\simeq 12{,}59$$
$$BC \simeq \sqrt{12{,}59} \simeq \underline{3{,}54\text{cm}}$$



$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\hat{A})$$
$$= 4{,}8^2 + 3{,}4^2 - 2 \times 4{,}8 \times 3{,}4 \times \cos(111°)$$
$$\simeq 46{,}30$$
$$BC \simeq \sqrt{46{,}30} \simeq \underline{6{,}80\text{cm}}$$

② Démonstration

Quite à échanger B et C (cela ne modifie pas la formule) on suppose que AC est plus court que AB. On traite d'abord le cas où $\hat{A}$ est aigu.



Soit H le pied de la hauteur issue de C. On va calculer successivement : HC, AH, HB et enfin BC.

i) Dans le triangle AHC rectangle en H on a : $\frac{HC}{AC} = \sin(\hat{A}) \Leftrightarrow \boxed{HC = AC \times \sin(\hat{A})}$

ii) On a aussi $\frac{AH}{AC} = \cos(\hat{A}) \Leftrightarrow \boxed{AH = AC \times \cos(\hat{A})}$.

iii) On en déduit que $HB = AB - AH = AB - AC \times \cos(\hat{A})$.

iv) Avec i) on obtient $HC^2 = AC^2 \times \sin(\hat{A})^2$

et avec ii) on a $HB^2 = \left(AB - AC \times \cos(\hat{A})\right)^2 = AB^2 + AC^2 \times \cos(\hat{A})^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\hat{A})$.

deuxième identité remarquable

Dans le triangle HBC rectangle en H, le théorème de Pythagore s'écrit

$$BC^2 = HC^2 + HB^2 \Leftrightarrow BC^2 = \underbrace{AC^2 \times \sin(\hat{A})^2 + AC^2 \times \cos(\hat{A})^2}_{= AC^2 \times \left(\underbrace{\sin(\hat{A})^2 + \cos(\hat{A})^2}_{=1}\right) = AC^2} + AB^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\hat{A})$$

$$\Leftrightarrow BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\hat{A}).$$

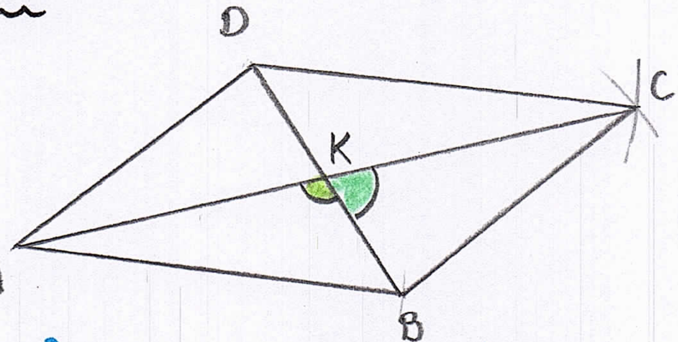
C.Q.F.D.

Exercice : faire le cas où $\hat{A}$ est obtus.

③ Application : l'identité du parallélogramme

THÉORÈME : dans un parallélogramme, la somme des carrés des diagonales est égale à la somme des carrés des côtés.

Preuve :



Dans le triangle KAB la formule d'Al-Kashi s'écrit :

$$AB^2 = KA^2 + KB^2 - 2 \times KA \times KB \times \cos(\widehat{AKB}).$$

Dans KBC elle s'écrit

$$BC^2 = KB^2 + KC^2 - 2 \times KB \times \overbrace{KC}^{= KA \text{ car } K = \text{milieu de } [AC]} \times \underbrace{\cos(\widehat{BKC})}_{= -\cos(\widehat{AKB})}.$$

car $\widehat{AKB}$ et $\widehat{BKC}$ sont supplémentaires !

$$= KB^2 + KA^2 + 2 \times KB \times KA \times \cos(\widehat{AKB})$$

$AK = KC$
$KD = KB$
$AB = CD$
$BC = DA$
} car ABCD est un parallélogramme.

On somme les deux égalités :

$AB^2 + BC^2 = 2KA^2 + 2KB^2$ donc :

(tout le reste s'élimine !)

$$AB^2 + BC^2 + \overbrace{CD^2}^{=AB^2} + \overbrace{DA^2}^{=BC^2} = 2 \times (AB^2 + BC^2)$$
$$= 4 \times KA^2 + 4 \times KB^2 = (2 \times KA)^2 + (2 \times KB)^2$$
$$= AC^2 + BD^2.$$

C.Q.F.D.