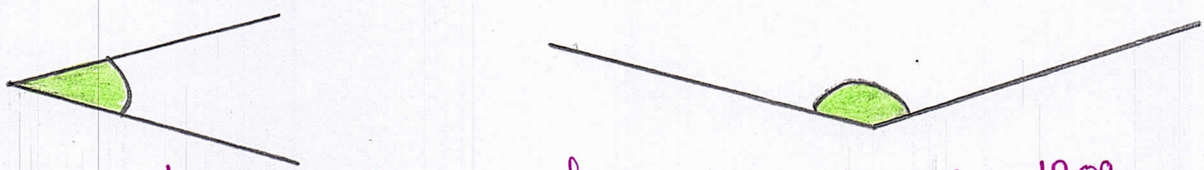
LEÇON 70 : LIEN AVEC LE TRIANGLE RECTANGLE

① Encore du vocabulaire sur les angles !

DÉFINITION : on dit qu'un angle saillant est :

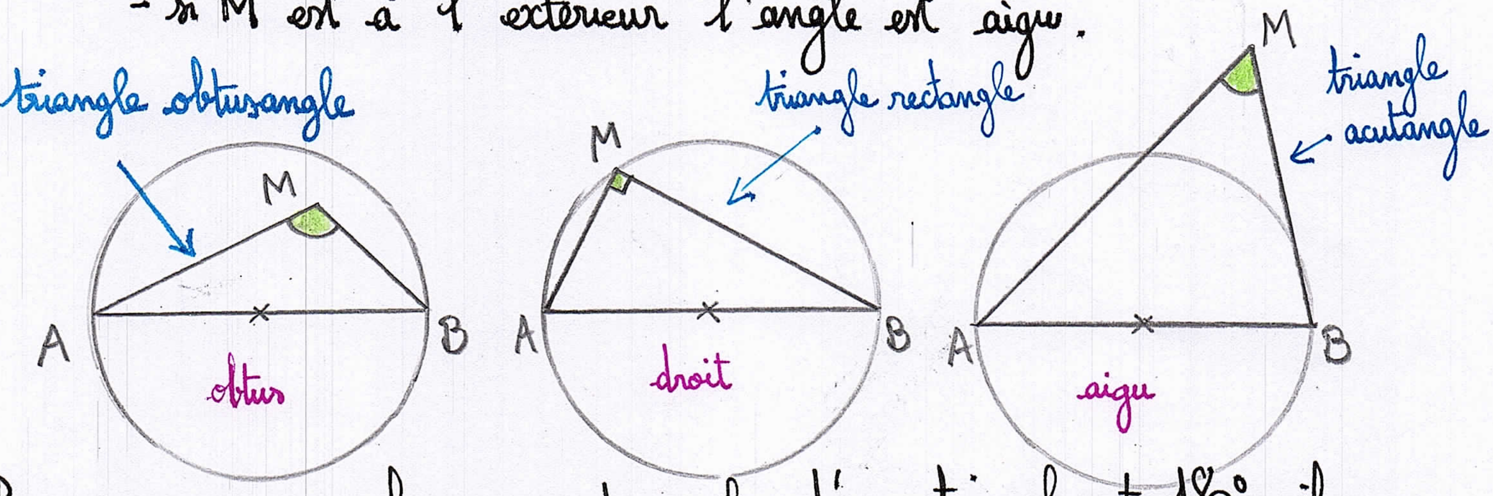
- *aigu* s'il est plus petit qu'un angle droit
- *obtus* s'il est plus grand qu'un angle droit.



aigu : mesure entre 0° et 90°   obtus : mesure entre 90° et 180°

PROPRIÉTÉ : soient A, B et M trois points distincts. L'angle $\widehat{AMB}$ est droit si et seulement si M est sur le cercle de diamètre [AB]. Plus précisément :

- si M est à l'intérieur du disque l'angle $\widehat{AMB}$ est obtus,
- si M est à l'extérieur l'angle est aigu.



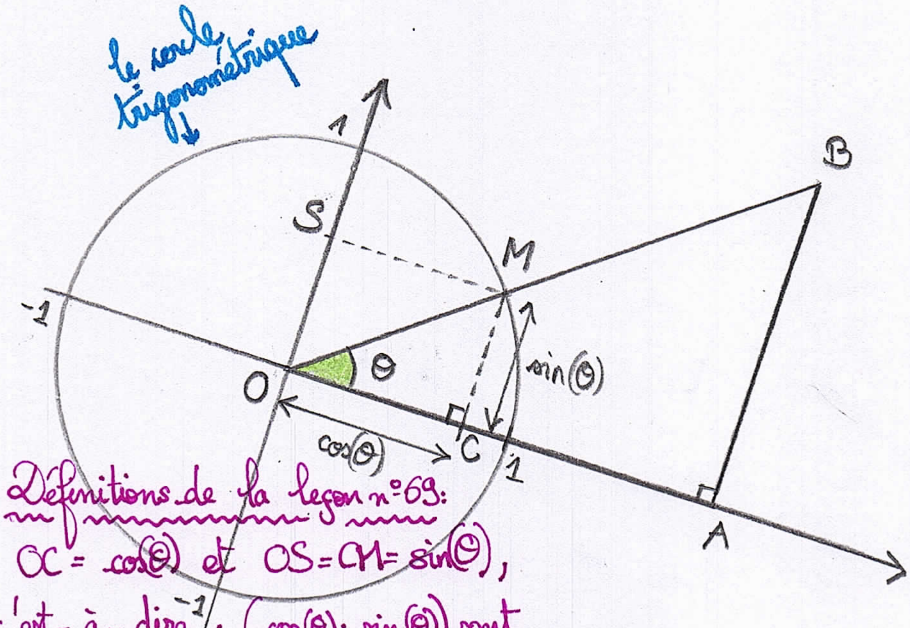
Remarque : puisque la somme des angles d'un triangle est 180°, il y a au maximum un angle obtus dans un triangle. Ce qui fait trois sortes de triangles :

- triangle obtusangle (avec un angle obtus)
- triangle rectangle (avec un angle droit)
- triangle acutangle (dont tous les angles sont aigus).

② Triangles rectangles

Il s'agit de vérifier que les nouvelles définitions de cos et sin, vues dans la leçon précédente (n° 69) correspondent aux anciennes (leçon n° 10).

Démonstration : soit OAB un triangle rectangle en A. On positionne un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ avec $\vec{i}$ colinéaire à $\vec{OA}$, de même sens, et $\vec{j}$ du « même côté » que B. Et on trace le cercle trigonométrique.



Définitions de la leçon n°69 :
$OC = \cos(\theta)$ et $OS = CM = \sin(\theta)$,
c'est-à-dire : $(\cos(\theta); \sin(\theta))$ sont les coordonnées de M.

Les droites (CM) et (AB) sont parallèles donc d'après le théorème de Thalès on a

$$\frac{OC}{OA} = \frac{CM}{AB} = \frac{OM}{OB}.$$

Et on a OM = 1 car M est sur le cercle trigonométrique.

Alors :

$$\frac{OC}{OA} = \frac{OM}{OB} \underset{\text{produit en croix}}{\Leftrightarrow} \frac{\overset{=\cos(\theta)}{OC}}{\underbrace{OM}_{=1}} = \frac{OA}{OB} \Leftrightarrow \frac{\cos(\theta)}{1} = \frac{OA}{OB} \Leftrightarrow \cos(\theta) = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\frac{CM}{AB} = \frac{OM}{OB} \Leftrightarrow \frac{\overset{=\sin(\theta)}{CM}}{\underbrace{OM}_{=1}} = \frac{AB}{OB} \Leftrightarrow \frac{\sin(\theta)}{1} = \frac{AB}{OB} \Leftrightarrow \sin(\theta) = \frac{\text{opposé}}{\text{hypoténuse}}$$

On retrouve les définitions de la leçon n° 10 !

Reste la tangente.

DÉFINITION : si θ n'est pas un angle droit on pose $\boxed{\tan(\theta) = \dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}}$. ← nouvelle définition

Et alors :

$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{\frac{\text{opposé}}{\text{hypoténuse}}}{\frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}}} = \frac{\text{opposé}}{\cancel{\text{hypoténuse}}} \times \frac{\cancel{\text{hypoténuse}}}{\text{adjacent}} = \boxed{\frac{\text{opposé}}{\text{adjacent}}}.$$

on simplifie !

On retrouve la définition de la leçon n° 10.

C.Q.F.D.