Leçon 67 : Méthode(s) de Monte-Carlo

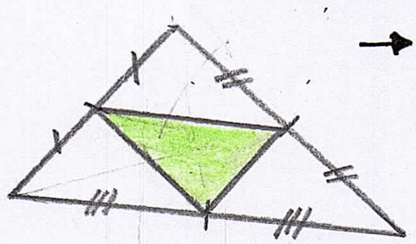
① Points aléatoires dans le plan

Dans une figure « pleine » il y a une infinité de points. La formule $\dfrac{\text{nb cas favorables}}{\text{nb total de cas}}$ n'a donc plus de sens. On la remplace en utilisant les aires.

Propriété : lorsqu'un point est choisi « équitablement » dans une figure, la probabilité qu'il soit dans une région est proportionnelle à l'aire de cette région :

$$\boxed{\mathbb{P}(M \in \mathcal{R}) = \frac{\text{aire}(\mathcal{R})}{\text{aire totale}}}$$

Ex :



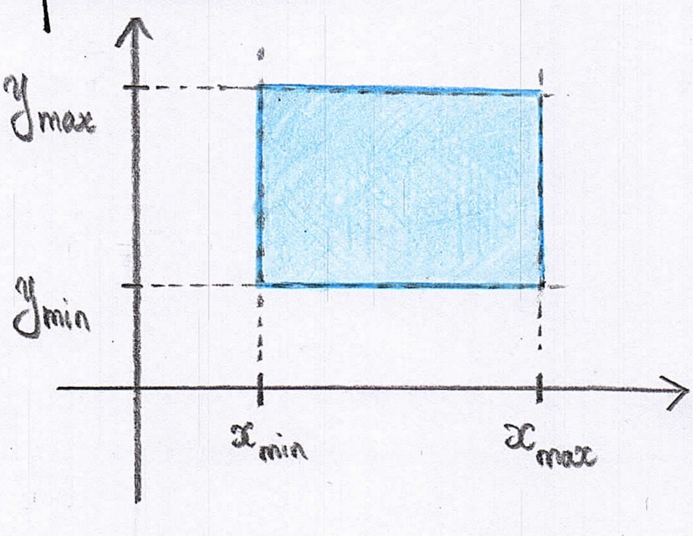
→ On prend M au hasard dans le grand triangle, alors

$$\mathbb{P}(M \in \square) = \frac{1}{4}$$

car le triangle vert représente ¼ du grand triangle.

② Simulation

Pour choisir un point au hasard dans un rectangle dont les côtés sont parallèles aux axes :



→ on choisit $x \in [x_{min} ; x_{max}]$

→ on choisit $y \in [y_{min} ; y_{max}]$

alors le point $M(x ; y)$ respecte la propriété ci-dessus.

```
from random import random
def Aléa(a,b):
    return a + (b-a)*random()

def PointAléa(xmin, xmax, ymin, ymax):
    x = Aléa(xmin, xmax)
    y = Aléa(ymin, ymax)
    return (x,y)
```

→ random() donne un nombre aléatoire dans $[0;1[$

→ nombre aléatoire dans $[a;b[$

Remarque : comme il y a une infinité de possibilité, il n'y a pas de différence entre $[a;b[$ et $[a;b]$. La probabilité de trouver exactement b est nulle.

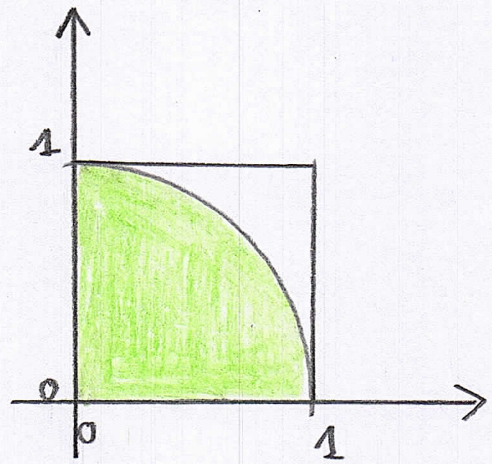
Pour choisir un point dans une figure plus compliquée, on utilise la méthode de rejet : on enferme la figure dans un rectangle ; on prend un point dans ce rectangle, et tant qu'il n'est pas dans la figure, on le jète et on en prend un autre.

③ Calcul d'une aire

On utilise la formule à l'envers : $\mathbb{P}(M \in \mathcal{R}) = \dfrac{\text{aire}(\mathcal{R})}{\text{aire totale}}$

$\iff \boxed{\text{aire}(\mathcal{R}) = \mathbb{P}(M \in \mathcal{R}) \times \text{aire totale}}$.

Ex :



Algorithme : on choisit beaucoup (disons un million) de points dans le carré.
On compte le nombre qui sont dans le quart de disque, alors

$$\mathbb{P}(M \in \square) \simeq \frac{\text{nb de pts dans le } 1/4 \text{ de disque}}{\text{nb total de points}}$$

← C'est la loi des grands nombres, voir la leçon n° 66.

on remplace

puis $ct_{\square} \simeq \mathbb{P}(M \in \square) \times$ aire du carré.

↳ elle vaut 1 dans cet exemple