

LEÇON 63: OPÉRATIONS SUR LES ÉVÉNEMENTS

Dans cette leçon Ω est l'univers associé à une expérience aléatoire.

① Événement contraire

DÉFINITION: si A est un événement, son contraire, noté \bar{A} , est l'ensemble des issues qui ne réalisent pas A .

se lit « non A »

PROPRIÉTÉ: on a $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\bar{A}) = 1$ (= 100%).

Ex: on lance une pièce, et on considère A : « on obtient PILE ». On suppose la pièce truquée, avec $\mathbb{P}(A) = 37\%$.

Alors $\mathbb{P}(\bar{A}) = \mathbb{P}(\text{« on obtient FACE »}) = 100\% - 37\% = \underline{63\%}$.

Ex: on lance trois dés ordinaires. Quelle est la probabilité de A : « on a obtenu au moins un ⊠ » ?

→ Ici $\Omega = \{1; 2; \dots; 6\}^3$ donc $\text{card}(\Omega) = 6^3 = 216$

$\bar{A} = \text{« on n'a pas obtenu } \square \text{ »} = \{1; 2; 3; 4; 5\}^3$ donc $\text{card}(\bar{A}) = 5^3 = 125$

↑ cela veut dire que les trois dés ont donné un résultat entre 1 et 5

On est dans une situation d'équiprobabilité donc $\mathbb{P}(\bar{A}) = \frac{\text{card}(\bar{A})}{\text{card}(\Omega)} = \frac{125}{216}$

puis $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A}) = \frac{216}{216} - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$.

Remarque: dans cette situation il est beaucoup plus facile de calculer la probabilité du contraire:

aucun ⊠ → 1 cas → rapide

au moins un ⊠ → 3 cas :

- a) ⊠ ? ?
- b) ⊠ ⊠ ?
- c) ⊠ ⊠ ⊠

} long

② Conjonctions et disjonctions

→ « lit « A ou B »

DÉFINITIONS: i) on note $A \cup B$ l'ensemble des issues qui réalisent soit A, soit B, soit les deux;

→ « lit « A et B »

ii) on note $A \cap B$ l'ensemble des issues qui réalisent simultanément les deux événements A et B.

PROPRIÉTÉ: $\mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

On n'a pas écrit les détails, mais il faut justifier ces deux valeurs.

Ex: on lance deux dés.

$$\rightarrow \mathbb{P}(A) = \frac{6}{36}$$

$$\mathbb{P}(B) = \frac{5}{36}$$

A: « on a fait un double »

B: « la somme vaut 8 »

$$A \cap B = \{ (4;4) \}$$

$$\text{donc } \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{36}$$

← une seule issue réalise à la fois A et B

$$\begin{aligned} \text{Ainsi } \mathbb{P}(A \cup B) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \\ &= \frac{6}{36} + \frac{5}{36} - \frac{1}{36} = \frac{10}{36} \end{aligned}$$

← la formule sert à calculer la probabilité d'une union à partir de celle de l'intersection (qui est en général plus simple).

DÉFINITION: on dit que A et B sont incompatibles lorsque $A \cap B = \emptyset$ (c'est-à-dire aucune issue ne réalise à la fois A et B).

PROPRIÉTÉ: lorsque A et B sont incompatibles on a $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$ et donc $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

③ Un jeu de logique

Rq: en S.I. on écrit

$$i) \overline{a+b} = \bar{a} \cdot \bar{b}$$

$$ii) \overline{a \cdot b} = \bar{a} + \bar{b}$$

THÉORÈME (LOIS DE MORGAN): $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ et $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

→ « le contraire de la disjonction est la conjonction des contraires »

→ « le contraire de la conjonction est la disjonction des contraires »