LEÇON 61 : SITUATIONS D'ÉQUIPROBABILITÉ

On considère toujours des expériences aléatoires n'ayant qu'un nombre fini d'issues.

① Cardinal d'un ensemble

DÉFINITION : le cardinal d'un ensemble est son nombre d'éléments.

Ex : $A = \{1;2;3;4;5;6\} \longrightarrow \text{card}(A) = 6$

$B = \{-7;0;3;5;12\} \longrightarrow \text{card}(B) = 5.$

PROPRIÉTÉ : si a et b sont deux entiers, avec $a \leq b$, alors

On n'oublie pas le $+1$.

$$\boxed{\text{card}(\{a;a+1;a+2;\dots;b-1;b\}) = b-a+1.}$$

C'est l'intervalle de tous les entiers de a jusqu'à b.

Ex : $\text{card}(\{1;2;\dots;6\}) = 6-1+1 = 6.$

Si on oublie le $+1$, ça ne donne pas le bon résultat...

② Situations d'équiprobabilité

DÉFINITION : on est dans une situation d'équiprobabilité lorsque toutes les issues ont la même probabilité.

Soit p la valeur commune de tous les p_ω. On a alors

$$\sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1 \iff \text{card}(\Omega) \times p = 1 \iff \boxed{p = \frac{1}{\text{card}(\Omega)}}.$$

Puisque tous les p_ω sont égaux, leur somme est égale à leur valeur commune multipliée par leur nombre.

Ex : le dé (équilibré) à 6 faces : $\Omega = \{1; 2; \dots; 6\}$. La probabilité de chaque face est égale à $\dfrac{1}{\text{card}(\Omega)} = \boxed{\dfrac{1}{6}}$.

Ex : le dé (équilibré) à n faces : $\Omega = \{1; 2; 3; \dots; n\}$. La probabilité de chaque face est égale à $\dfrac{1}{\text{card}(\Omega)} = \dfrac{1}{n-1+1} = \boxed{\dfrac{1}{n}}$.

Remarque : en l'absence de précision, on est toujours dans une situation d'équiprobabilité. Ainsi lorsqu'on parle d'un dé, sans précision, il est équilibré.

③ La formule

THÉORÈME : lorsqu'on est dans une situation d'équiprobabilité, la probabilité de n'importe quel événement A s'obtient par la formule :

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}}.$$

« nb de cas favorables »

« nb total de cas »

Preuve : $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega = \underbrace{\text{card}(A)}_{\text{le nb de termes dans la somme}} \times \underbrace{\frac{1}{\text{card}(\Omega)}}_{\text{la valeur commune des } p_\omega} = \dfrac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$. C.Q.F.D.

Ex : on lance trois dés. Quelle est la probabilité de $\underbrace{\text{faire 10}}_{A}$?

On énumère tous les cas favorables :

(1; 3; 6); (1; 4; 5); (1; 5; 4); (1; 6; 3);

(2; 2; 6); (2; 3; 5); (2; 4; 4); (2; 5; 3); (2; 6; 2);

(3; 1; 6); (3; 2; 5); (3; 3; 4); (3; 4; 3); (3; 5; 2); (3; 6; 1);

(4; 1; 5); (4; 2; 4); (4; 3; 3); (4; 4; 2); (4; 5; 1);

(5; 1; 4); (5; 2; 3); (5; 3; 2); (5; 4; 1);

(6; 1; 3); (6; 2; 2); (6; 3; 1)

→ il y a 27 cas

On est dans une situation d'équiprobabilité

→ Donc

$\mathbb{P}(A) = \dfrac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} \boxed{= \dfrac{27}{216}}.$

→ le 216 est expliqué dans la leçon suivante.