

LEÇON 60 : PROBABILITÉ SUR UN UNIVERS

On ne considère que des expériences ayant un nombre fini d'issues.

① Lois de probabilité

DÉFINITION: une loi de probabilité (sur l'univers Ω) est la donnée, pour chaque issue $\omega \in \Omega$, d'un nombre positif p_ω , de telle manière que la somme de tous les p_ω vaut 1 : $\sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1$.

Ceci se lit: « la somme des p_ω pour tous les ω dans Ω est égale à 1 ».

PROPRIÉTÉ: la probabilité d'une issue ne peut pas être strictement plus grande que 1.

Preuve: on procède par l'absurde. Imaginons qu'il y a une issue $\omega_1 \in \Omega$ de probabilité $p_{\omega_1} > 1$. Alors on aurait

$$1 = \sum_{\omega \in \Omega} p_\omega \geq p_{\omega_1} > 1$$

ce qui est absurde. C.Q.F.D.

Puisque tous les p_ω sont positifs, leur somme est supérieure à chacun d'eux.

Exemples:

a) Une pièce truquée.

ω	PILE	FACE
p_ω	0,3	0,7

(0,3+0,7 = 1)

On peut évidemment utiliser des pourcentages:
 0,3 = 30% 0,7 = 70%
 et 1 = 100%.

b) Un dé truqué.

ω	1	2	3	4	5	6
p_ω	0,1	0,15	0,15	0,15	0,15	0,3

0,1 + 0,15 + 0,15 + 0,15 + 0,15 + 0,3 = 1

Une loi de probabilité se ~~donne~~ présente souvent sous la forme d'un tableau.

② Probabilité d'un événement

DÉFINITION: la probabilité d'un événement A , qu'on note $\mathbb{P}(A)$, est la somme ~~de~~ des probabilités des issues qui le réalisent:

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} p_{\omega}$$

PROPRIÉTÉ: quel que soit l'événement A on a $\mathbb{P}(A) \in [0; 1]$.

Preuve: i) $\mathbb{P}(A)$ est défini par une somme de nombres positifs donc $\mathbb{P}(A) \geq 0$.
ii) Puisque les p_{ω} sont tous positifs on a

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} p_{\omega} \leq \sum_{\omega \in \Omega} p_{\omega} = 1 \quad \text{donc } \mathbb{P}(A) \leq 1.$$

C.Q.F.D.

la somme d'une partie des p_{ω} est inférieure ou égale à la somme de tous les p_{ω} .

Ex: encore un de truqué!

ω	1	2	3	4	5	6
p_{ω}	0,2	0,1	0,1	0,1	0,2	0,3

$$0,2 + 0,1 + 0,1 + 0,1 + 0,2 + 0,3 = 1$$

On dresse la liste des issues qui réalisent l'événement...

... puis on additionne les probabilités correspondantes.

A : « le résultat est pair »

$$A = \{2; 4; 6\}$$

$$\text{donc } \mathbb{P}(A) = p_2 + p_4 + p_6$$

$$= 0,1 + 0,1 + 0,3 = \underline{0,5}.$$

B : « le résultat est ≥ 4 »

$$B = \{4; 5; 6\}$$

$$\text{donc } \mathbb{P}(B) = p_4 + p_5 + p_6$$

$$= 0,1 + 0,2 + 0,3 = \underline{0,6}.$$