LEÇON 56 : COORDONNÉES D'UN VECTEUR

① Bases vectorielles

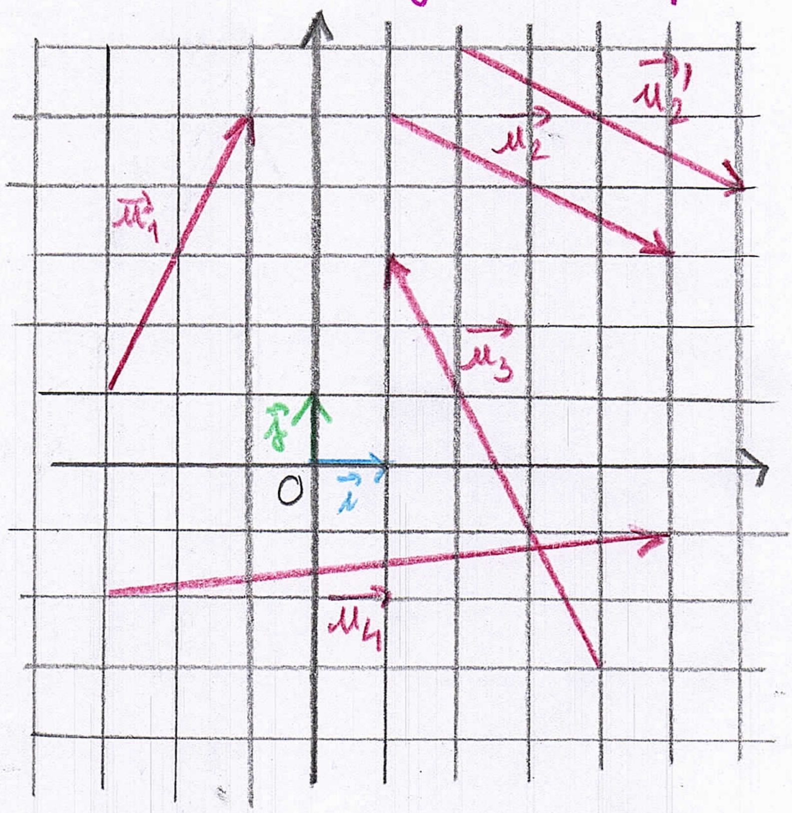
On rappelle que dans un repère $\mathcal{R} = (O; \vec{i}; \vec{j})$, les deux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ne doivent pas être colinéaires. Un tel couple $(\vec{i}; \vec{j})$ s'appelle une <u>base vectorielle</u>.

<u>DÉFINITION</u> : soit $\vec{u}$ un vecteur, et soit M le point tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$. Si $(x; y)$ sont les coordonnées de M, on a

$$\boxed{\vec{u} = \overrightarrow{OM} = x \times \vec{i} + y \times \vec{j}.}$$

On dit que x est l'abscisse de $\vec{u}$ et y est l'ordonnée de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}; \vec{j})$. Le couple $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ forme les <u>coordonnées</u> de $\vec{u}$.

⚠ Pour distinguer les points et les vecteurs, on écrit $(x; y)$ en ligne pour les coordonnées du point, et $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ en colonne pour celles du vecteur.



<u>Exemples</u> :

$\vec{u_1} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ deux unités vers la droite quatre vers le haut

$\vec{u_2} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \vec{u_2}'$ <u>Rappel</u> : un vecteur n'a pas de position !

$\vec{u_3} \begin{pmatrix} -3 \\ +6 \end{pmatrix}$

$\vec{u_4} \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$

② Calcul à partir des extrémités

PROPRIÉTÉ : si $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ alors les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

Cette hypothèse est essentielle, et il faut la citer lorsqu'on utilise la formule.

PROPRIÉTÉ (EXPRESSION DE LA NORME) : lorsque le repère est orthonormé :

i) la norme de $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

ii) la norme de $\overrightarrow{AB}$ est $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Ces formules ne se simplifient pas (car il y a le "+" entre le carré et la racine carrée).

③ Exemples d'utilisations

Dans un repère quelconque : $A(3 ; -5)$ $B(2 ; 2)$ $C(3 ; -4)$.

a) Déterminer les coordonnées de M tel que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC}$.

$\overrightarrow{AM} : \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 3 \\ y + 5 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BC} : \begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 2 \\ -4 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix}$

On calcule les coordonnées de $\overrightarrow{AM}$ avec des « inconnues » à la place des coordonnées de M, qu'on ne connaît pas encore.

donc $\begin{cases} x - 3 = 1 \\ y + 5 = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -11 \end{cases}$.

b) Déterminer les coordonnées du milieu I de [AB].

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{3+2}{2} = 2,5 \\[2ex] y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{-5+2}{2} = -1,5 \end{cases}$$

On fait la moyenne des coordonnées des extrémités du segment.