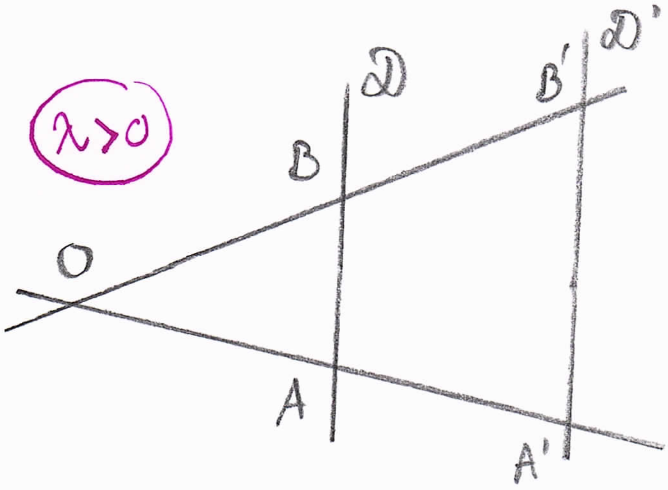
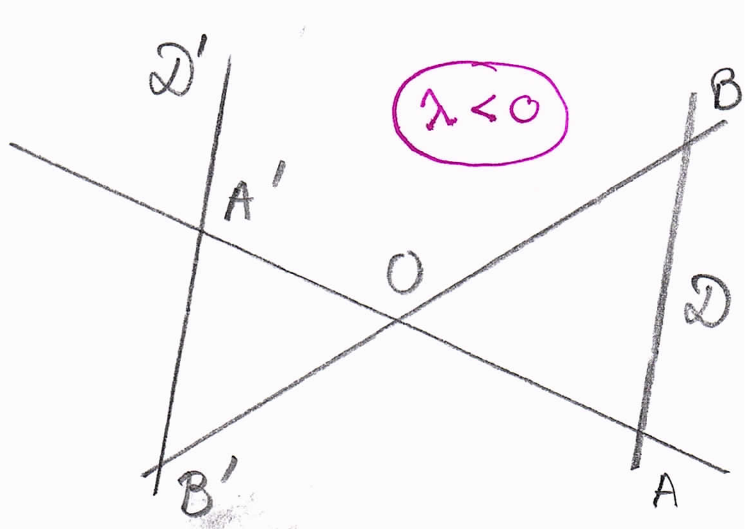
Leçon 54 : Homothéties

① Version vectorielle du théorème de Thalès





Théorème : dans les deux configurations ci-dessus, si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles, alors :

i) $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ sont colinéaires

ii) tous les coefficients de colinéarité sont les mêmes : on a

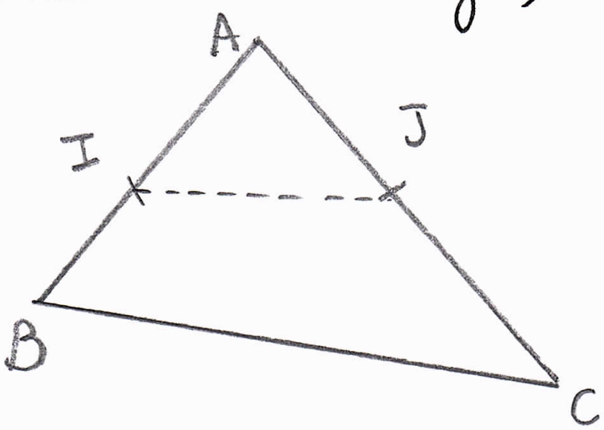
$$\overrightarrow{OA'} = \lambda \times \overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{OB'} = \lambda \times \overrightarrow{OB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{A'B'} = \lambda \times \overrightarrow{AB}$$

avec le <u>même</u> λ.

Réciproquement : si $\overrightarrow{OA'} = \lambda \times \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB'} = \lambda \times \overrightarrow{OB}$ avec le <u>même</u> λ, alors $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles.

② Théorème des milieux

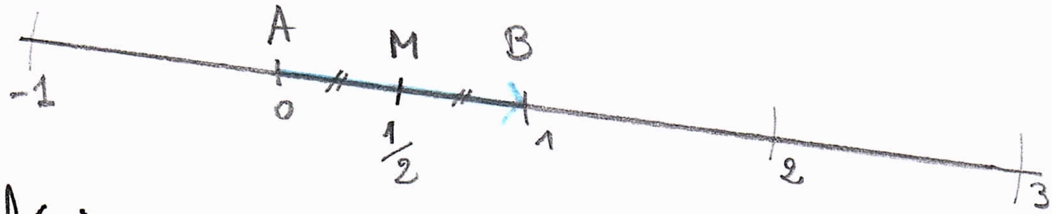
Soient ABC un triangle, $I \in [AB]$ et $J \in [AC]$.



Théorème : I et J sont les milieux respectifs de [AB] et [AC] si et seulement si $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

C'est en fait un cas particulier du théorème de Thalès !

Remarque : M est le milieu de [AB] signifie que sur la droite graduée $(A, \overrightarrow{AB})$, il se trouve à l'abscisse $\frac{1}{2}$, autrement dit que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} \times \overrightarrow{AB}$.



Preuve du théorème.

• **Sens direct** : on suppose que I est le milieu de [AB] et J celui de [AC], c'est-à-dire que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2} \times \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2} \times \overrightarrow{AC}$. Alors :

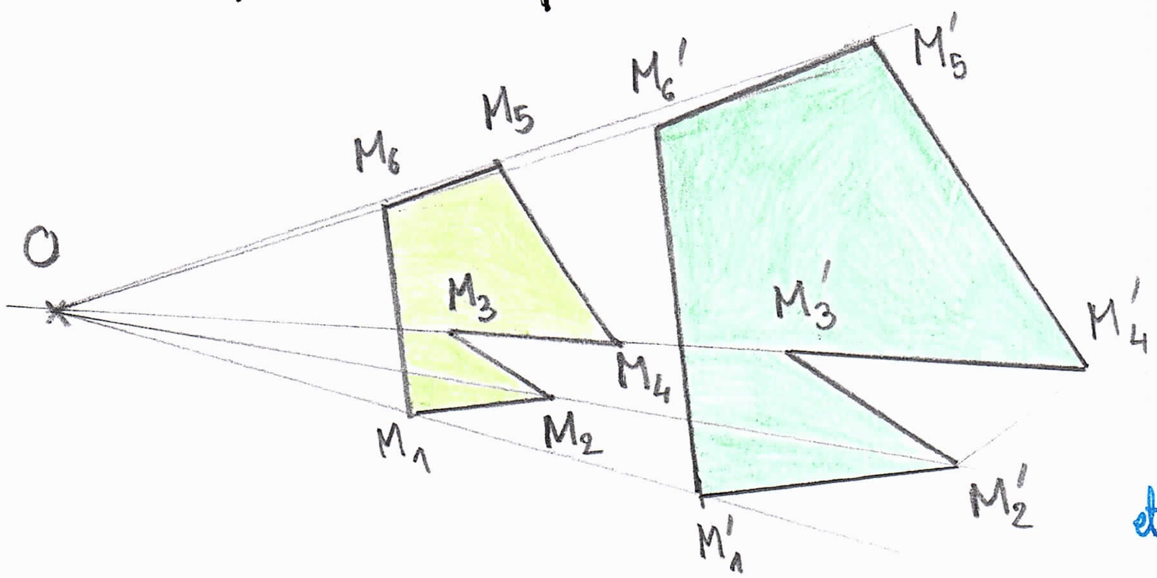
$$\overrightarrow{IJ} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{relation de} \\ \text{Chasles}}}{=} \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{opposé}}}{=} -\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AJ} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{par hypothèse}}}{=} -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{associativité}}}{=} \frac{1}{2} \times (-\overrightarrow{AB}) + \frac{1}{2} \times \overrightarrow{AC}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{opposé}}}{=} \frac{1}{2} \times \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2} \times \overrightarrow{AC} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{distributivité}}}{=} \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{relation de Chasles.}}}{=} \frac{1}{2} \times \overrightarrow{BC}.$$

• **Réciproque** : voir les exercices.

③ Homothéties

DÉFINITION : l'homothétie de centre O et de rapport λ est la transformation géométrique qui à tout point M associe le point M' tel que $\boxed{\overrightarrow{OM'} = \lambda \times \overrightarrow{OM}}$.



Le coefficient de colinéarité étant le même partout, la réciproque du théorème de Thalès s'applique :
$(M_1M_2) \parallel (M_1'M_2')$
et $M_1'M_2' = \lambda \times M_1M_2$.