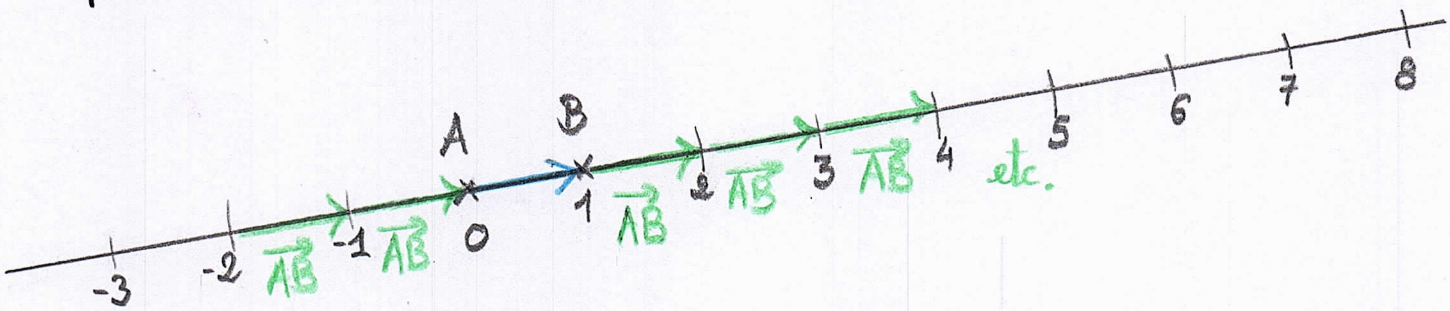
Leçon 53 : multiplication par un scalaire, colinéarité

① Droites graduées

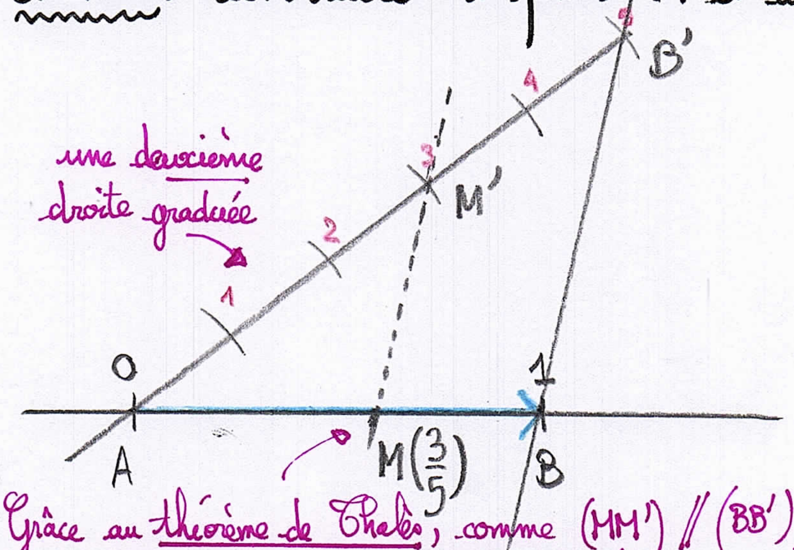
À partir de deux points <u>non confondus</u> A et B, on peut construire une droite graduée. Pour cela, on reporte plusieurs fois le vecteur $\overrightarrow{AB}$ à partir du point A, dans les deux sens :



Ces graduations définissent des <u>abscisses</u> : à tout point $M \in (AB)$ on peut associer une abscisse $\lambda \in \mathbb{R}$ (elle est entière, c'est-à-dire $\lambda \in \mathbb{Z}$, lorsque M est <u>sur une graduation</u>, et pas entière lorsque M est entre deux graduations) ; et inversement à tout réel $\lambda \in \mathbb{R}$ correspond un point unique M sur (AB).

② Interlude thalésienne

<u>Question</u> : construire le point M d'abscisse $\frac{3}{5}$ sur la droite (AB).



Méthode :

① On construit une <u>autre</u> droite graduée, à partir de A, et non confondue avec (AB).

② Sur cette deuxième droite on place M'(3) et B'(5).

③ On trace (BB').

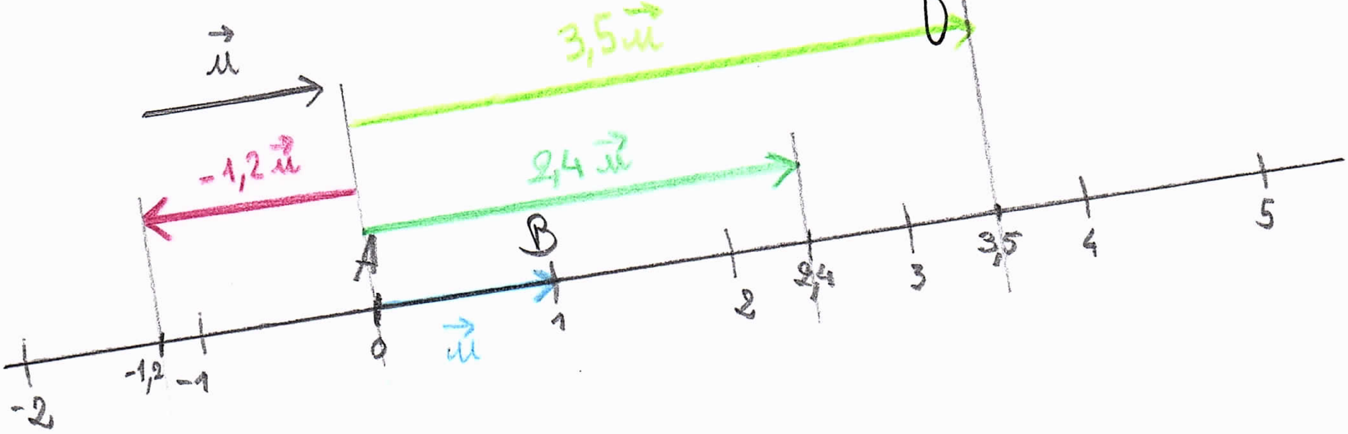
④ On construit la parallèle à (BB') passant par M'. Elle coupe (AB) en M.

Grâce au <u>théorème de Thalès</u>, comme $(MM') \parallel (BB')$, on a $\frac{AM}{AB} = \frac{AM'}{AB'} = \frac{3}{5}$ donc M est à l'abscisse $3/5$.

③ Multiplication d'un vecteur par un scalaire

C'est comme ça qu'on appelle les nombres qui servent à multiplier les vecteurs

Définition : soient $\vec{u}$ un vecteur et λ un nombre (un « scalaire »).
Si $\vec{u} = \vec{0}$, on définit $\boxed{\lambda \times \vec{0} = \vec{0}}$. Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, on choisit un représentant $\overrightarrow{AB}$ de $\vec{u}$, et sur la droite graduée qu'il définit, on place le point M d'abscisse λ. On définit alors $\boxed{\lambda \times \vec{u} = \overrightarrow{AM}}$.



Remarque : en pratique, $\lambda \times \vec{u}$ est le vecteur qui a :

i) la même direction que $\vec{u}$,

ii) le même sens (si $\lambda \geq 0$) ou le sens contraire (si $\lambda \leq 0$),

iii) une norme égale à celle de $\vec{u}$ multipliée par $|\lambda|$: $\|\lambda \times \vec{u}\| = |\lambda| \times \|\vec{u}\|$

la norme d'un vecteur se note entre doubles barres

valeur absolue

Propriétés : pour tous nombres λ, μ et tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ on a :

i) $0 \times \vec{u} = \vec{0}$

ii) $\lambda \times \vec{0} = \vec{0}$

iii) $(-1) \times \vec{u} = -\vec{u}$

iv) $1 \times \vec{u} = \vec{u}$

v) $\lambda \times \vec{u} + \mu \times \vec{u} = (\lambda + \mu) \times \vec{u}$

vi) $\lambda \times (\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \times \vec{u} + \lambda \times \vec{v}$ ← distributivité

vii) $\lambda \times (\mu \times \vec{u}) = (\lambda \times \mu) \times \vec{u}$

associativité

viii) $(-\lambda) \times \vec{u} = \lambda \times (-\vec{u})$.

et réciproquement : $\lambda \times \vec{u} = \vec{0} \iff \lambda = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$.

④ Colinéarité

Définition : on dit que deux vecteurs sont <u>colinéaires</u> lorsqu'ils ont la même direction. Cela revient à dire que l'un des deux est multiple de l'autre.

Propriété : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si on peut obtenir le vecteur nul en les combinant : c'est-à-dire qu'il existe deux nombres λ et μ, pas tous les deux nuls, tels que $\lambda \times \vec{u} + \mu \times \vec{v} = \vec{0}$.