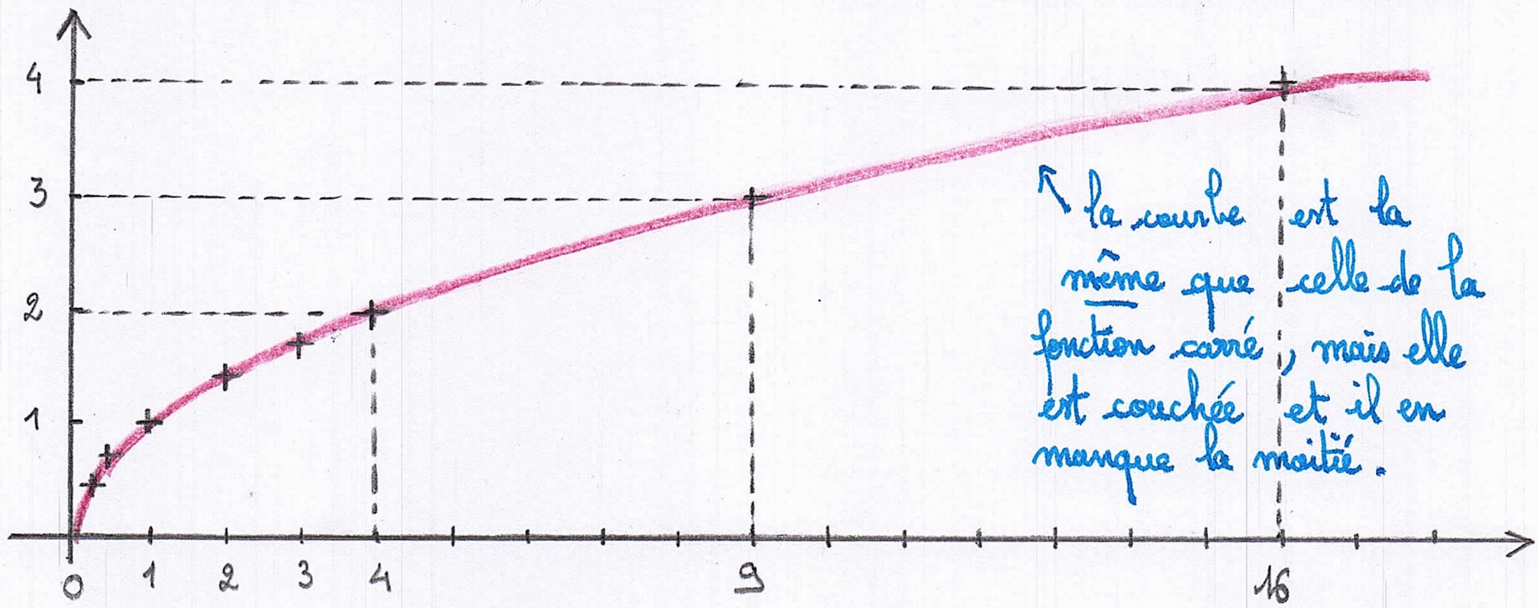
LEÇON 47 : LA FONCTION RACINE CARRÉE

C'est la fonction $f : [0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$.

$$x \longmapsto \sqrt{x}$$

① Courbe représentative

x	0	0,25	0,5	1	2	3	4	9	16	25
$f(x)=\sqrt{x}$	0	0,5	$\simeq$ 0,7	1	$\simeq$1,4	$\simeq$1,7	2	3	4	5



② Propriétés

PROPRIÉTÉ : la fonction racine carrée est toujours positive.

x	0	$+\infty$
$f(x)=\sqrt{x}$	0	+

on hachure les valeurs interdites

PROPRIÉTÉ : la fonction racine carrée est croissante sur $[0;+\infty[$.

x	0	$+\infty$
$f(x)=\sqrt{x}$	0 $\nearrow$	$+\infty$

PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES : pour $x, y \in [0;+\infty[$ on a :

i) $\sqrt{x} \times \sqrt{x} = x$

ii) $\sqrt{x^2} = |x|$ (pour tout $x \in \mathbb{R}$)

iii) $\sqrt{x \times y} = \sqrt{x} \times \sqrt{y}$

iv) $\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$ (si $y \neq 0$)

v) $\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}$

vi) l'inégalité précédente est stricte sauf si $x=0$ ou $y=0$.

Preuve du v) : on a
$$(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2 = (\sqrt{x})^2 + 2\times\sqrt{x}\times\sqrt{y} + (\sqrt{y})^2$$
$$= x + y + \underbrace{2\sqrt{x}\sqrt{y}}_{\geq 0} \geq x+y$$

≥ 0 (et même >0 si $x \neq 0$ et $y \neq 0$)

et puisque la fonction $\sqrt{}$ préserve l'ordre on a

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2 \geq x+y \Longrightarrow \sqrt{x}+\sqrt{y} \geq \sqrt{x+y}.$$

C.Q.F.D.

on prend la racine carrée de chaque membre

③ Liens avec la fonction carrée

Le carré et la racines carrée sont réciproques l'une de l'autre.

PROPRIÉTÉ :

i) si x, y sont positifs, alors $y = x^2 \Leftrightarrow \sqrt{y} = x$.

ii) si y seulement est positif, alors $y = x^2 \Leftrightarrow \sqrt{y} = x$ ou $-\sqrt{y} = x$.

Ex : a) $\sqrt{x} \in [1;4] \Leftrightarrow x \in [1;16]$

car $1^2 = 1$

car $4^2 = 16$ (ou $\sqrt{x} = 4 \Leftrightarrow x = 16$) si x est positif et il l'est (sinon on ne pourrait pas écrire $\sqrt{x}$)

b) $x^2 \in [3;10] \Leftrightarrow x \in [-\sqrt{10}; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}; \sqrt{10}]$.

car $x^2 = 10 \Leftrightarrow x = \sqrt{10}$ ou $x = -\sqrt{10}$