LEÇON 39 : PROJECTION ORTHOGONALE SUR UNE DROITE

① Retour sur le théorème de Pythagore

Soient A, B et C trois points non confondus. Si ABC est rectangle en A alors $AB^2 + AC^2 = BC^2$. Mais comme $AB^2 > 0$ et $AC^2 > 0$, la relation de Pythagore implique $AB^2 < BC^2$ et $AC^2 < BC^2$.

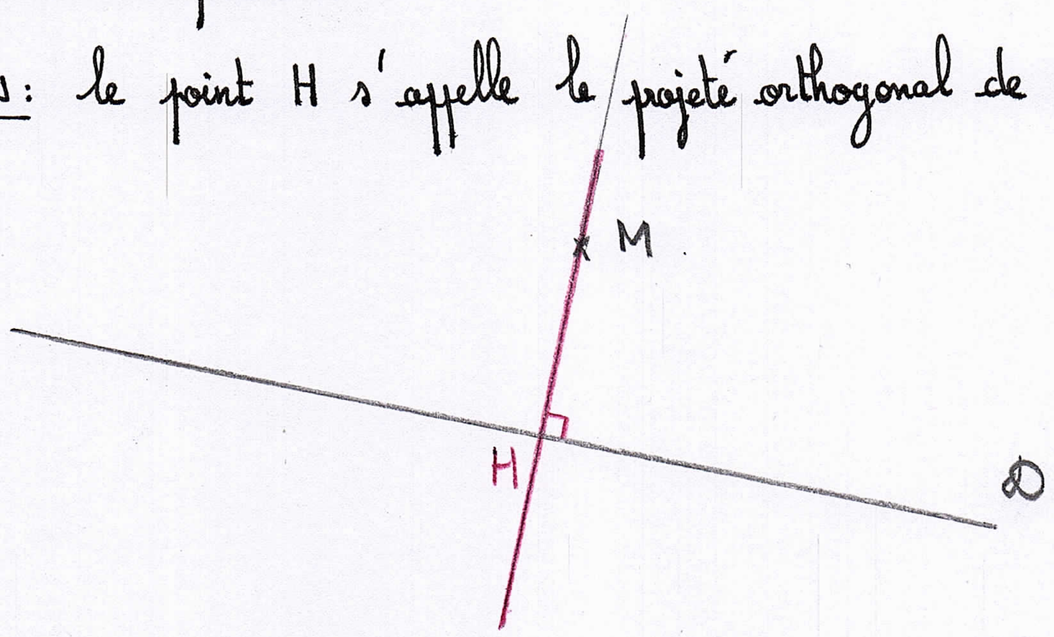
$\Leftrightarrow AB < BC$ $\qquad \Leftrightarrow AC < BC$

PROPRIÉTÉ : dans un triangle rectangle, le côté qui fait face à l'angle droit est <u>strictement plus long</u> que n'importe lequel des deux autres.

② Projeté orthogonal

Soit $\mathcal{D}$ une droite et soit M un point quelconque. On construit la perpendiculaire à $\mathcal{D}$ qui passe par M (il n'y en a qu'une) ; elle coupe $\mathcal{D}$ en un point H.

DÉFINITION : le point H s'appelle le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$.

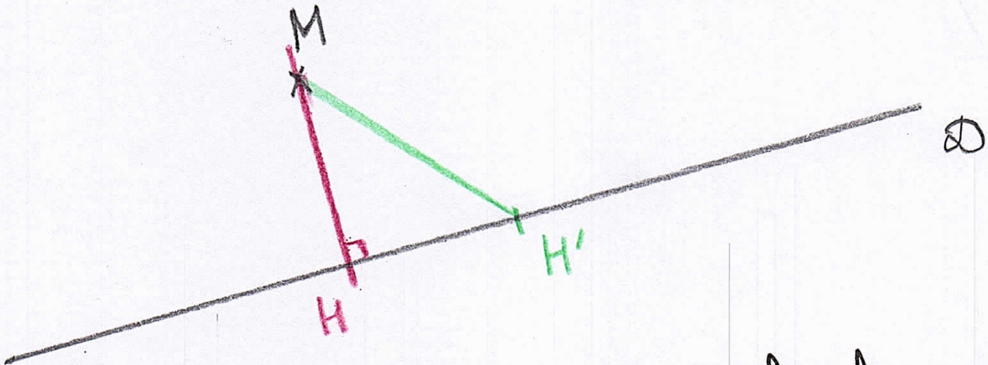


PROPRIÉTÉ : si M est sur $\mathcal{D}$, alors il est confondu avec H.

③ Caractérisation par la distance

PROPRIÉTÉ : H est le point de $\mathcal{D}$ qui est le plus proche de M.

Preuve : soit H' un point de $\mathcal{D}$ différent de H. Le triangle HMH' est rectangle en H et donc d'après l'observation du ① on a $HM < H'M$.

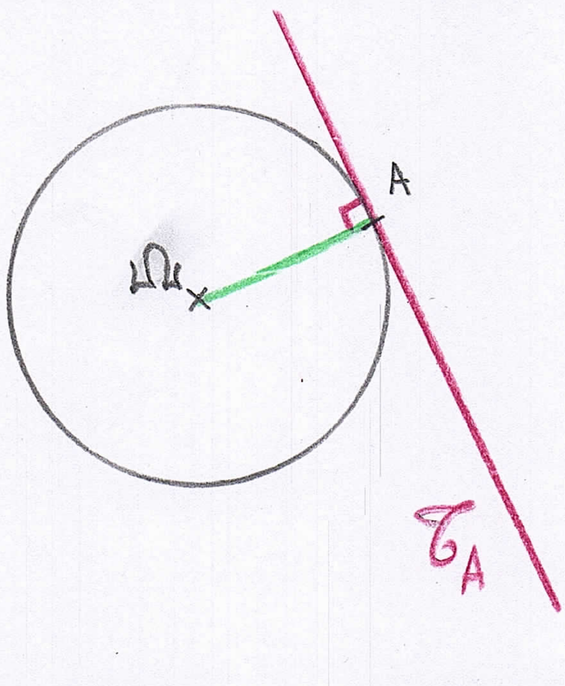


C.Q.F.D.

Remarque : et réciproquement le point de $\mathcal{D}$ qui est le plus proche de M est le projeté orthogonal (puisque s'il ne l'était pas, il ne serait pas le plus proche d'après la propriété ci-dessus).

④ Une application : tangente à un cercle

Soient $\mathcal{C}$ un cercle, de centre Ω, et A un point de $\mathcal{C}$. L'unique droite $\mathcal{T}_A$ passant par A et ne traversant pas le cercle (c'est-à-dire dont les points, hormis A, sont en-dehors de $\mathcal{C}$) est appelée une tangente.



PROPRIÉTÉ : la tangente est perpendiculaire au rayon : $(\Omega A) \perp \mathcal{T}_A$.

Preuve : si $M \in \mathcal{T}_A$ et n'est pas le point A, alors $\Omega M > \Omega A$ (car M est en-dehors du cercle). Donc d'après ③ le point A est le projeté orthogonal de Ω sur $\mathcal{T}_A$. En particulier $(\Omega A) \perp \mathcal{T}_A$.

C.Q.F.D.