LEÇON 31 : LE CRIBLE D'ÉRATOSTHÈNE

① Rappels sur les nombres premiers

DÉFINITION : on dit qu'un entier naturel est <u>premier</u> s'il admet exactement deux diviseurs : un et lui-même. Par convention, 1 n'est donc pas premier (puisqu'il a un seul diviseur).

Les petits nombres premiers sont : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; ... Il y a une <u>infinité</u> de nombres premiers. On va ici les chercher <u>tous</u> (en tout cas jusqu'à une certaine borne).

C'est Euclide qui a démontré ça !

② Quelques remarques

Soit $x \geqslant 2$ un nombre qui n'est pas premier. Il admet donc un diviseur d qui n'est ni 1 ni x lui-même. On peut écrire

Un tel nombre est appelé « composé ».

$$x = d \times \left(\frac{x}{d}\right)$$

$\frac{x}{d}$ est un <u>entier</u> car d divise x

et soit d, soit $\frac{x}{d}$ est inférieur ou égal à $\sqrt{x}$ (car sinon on aurait $x = d \times \left(\frac{x}{d}\right) > \sqrt{x} \times \sqrt{x} = x$: c'est absurde). D'où la

PROPRIÉTÉ : si $\underbrace{x}_{\neq 0;1}$ n'est pas premier, il admet un diviseur entre 2 et $\sqrt{x}$.

Autre chose : si x est divisible par d, et si d est divisible par d', alors x est divisible par d' (on dit que la relation de divisibilité est <u>transitive</u>).

③ Crible d'Ératosthène

Cela consiste à écrire tous les nombres, puis à cocher les multiples de 2, de 3, etc. ; à la fin les nombres qui restent sont les nombres premiers.

~~0~~	~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~	11	~~12~~	13
~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~	~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~
~~28~~	29	~~30~~	31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~	41
~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~	~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~
~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~	61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~
~~70~~	71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~	~~81~~	~~82~~	83
~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~	~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97
~~98~~	~~99~~	~~100~~	101	~~102~~	103	~~104~~	~~105~~	~~106~~	107	~~108~~	109	~~110~~	~~111~~

- 0 et 1 ne sont pas premiers
- On coche les multiples de 2, de 3, de 7…
- …et c'est tout : à partir de 11, le premier multiple à cocher serait $11^2 = 121$.

④ Avec l'ordinateur

```
def ÉRATOSTHÈNE(M):
    B = [True]*(M+1)
    B[0] = False ; B[1] = False
    d = 2 ; m = 4
    while m <= M :
        while m <= M :
            B[m] = False
            m += d
        d += 1 ; m = d*d
        while m <= M and not B[d] :
            d += 1 ; m = d*d
    return [x for x in range(M+1) if B[x]]
```

On représente le tableau ci-dessus par une liste de booléens : True veut dire « pas coché » et False veut dire « coché »

0 et 1 ne sont pas premiers

On « coche » les multiples de d.

On passe d'un multiple de d au suivant en lui ajoutant d

On renvoie la liste des nombres qui ne sont pas cochés.

⑤ Quelques statistiques

```
>>> ÉRATOSTHÈNE(100)
[2;3;5;7;11;13;17;19;23;29;31;37;41;43;
 47;53;59;61;67;71;73;79;83;89;97]
>>> len(ÉRATOSTHÈNE(10**6))
78 498
>>> len(ÉRATOSTHÈNE(10**9))
50 847 534
```

$$\frac{78\,498}{10^6} = 0{,}078\,498$$

Donc $\simeq 7{,}85\%$ des nombres entre 1 et 10^6 sont premiers.

$$\frac{50\,847\,534}{10^9} = 0{,}050\,847\,534$$

Donc $\simeq 5{,}08\%$ des nombres entre 1 et 10^9 sont premiers.