Leçon 23 : Développement décimal d'un nombre réel

① Quoi de neuf au dénominateur ?

On fixe un entier $n \geq 1$ et on considère le nombre

$$t = 0,\underbrace{0001}_{n \text{ chiffres}}000100010001\,0001\ldots$$

Rappel : si $\xi = 0,9999\ldots$
alors $10 \times \xi - 9 = \xi$
$\Leftrightarrow 9\xi = 9$
$\Leftrightarrow \boxed{\xi = 1}$

On voit que $\underbrace{9999}_{n \text{ chiffres}} \times t = 0,9999999\ldots = 1$

donc $t = \dfrac{1}{\underbrace{9999}_{n \text{ chiffres}}}$.

Remarque : $\underbrace{9999}_{n \text{ chiffres}} = 10^n - 1$.

② Développements périodiques

Prenons maintenant n'importe quel entier ayant au plus n chiffres, par exemple $x = 4207$. Alors

$$x \times t = 4207 \times 0,\underbrace{0001}_{n \text{ chiffres}}0001\ldots = 0,42074207\ldots$$

donc $0,42074207\ldots = \dfrac{x}{9999} = \dfrac{4207}{9999}$.

Exemples :

$0,\underbrace{07}_{2 \text{ chiffres}}070707\ldots \left(= \dfrac{07}{99}\right) = \dfrac{7}{99}$

$0,\underbrace{4}_{1 \text{ chiffre}}44\ldots = \dfrac{4}{9}$

$0,\underbrace{133}_{3 \text{ chiffres}}133\ldots = \dfrac{133}{999}$

$0,\underbrace{3}_{1 \text{ chiffre}}33\ldots = \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3}$

on peut simplifier

$0,\underbrace{09}_{2 \text{ chiffres}}0909\ldots \left(= \dfrac{09}{99}\right) = \dfrac{9}{99} = \dfrac{1}{11}$

on peut simplifier

etc.

③ Rappels sur les divisions

On va commencer par en poser une :

```
173 | 14
 33 |------------
  50| 12,35714285...
   80
   100
     20
      60
       40
       120
        80...
         10
          20
           60...
```

période : 571428

répétition

répétition

Lorsqu'on pose la division de a (ici 173) par b (ici 14) les restes sont 0, 1, 2, 3, …, b − 1.

Si on poursuit la division sans s'arrêter (disons au moins b+1 étapes), l'un des restes va forcément ré-apparaître, et à partir de là les calculs vont se répéter en boucle !

C'est le principe de Dirichlet

Si on pioche b+1 objets parmi b, alors on en aura forcément un en double.

PROPRIÉTÉ : le développement décimal d'un nombre rationnel est périodique à partir d'un certain rang.

④ Exemples

On va voir que la réciproque de la propriété précédente est vraie.

Prenons $x = 30{,}5474747\ldots$ (période : 47). On sépare la partie irrégulière $30{,}5$ $= \frac{305}{10} = \frac{61}{2}$ et la partie périodique $0{,}474747\ldots$ $= \frac{47}{99}$.

Puis on reconstruit x : $0{,}0474747\ldots = \frac{47}{99} \div 10 = \frac{47}{990}$

$$\text{donc } x = \frac{61^{\times 495}}{2_{\times 495}} + \frac{47}{990} = \frac{30195}{990} + \frac{47}{990} = \frac{30242}{990} ;$$

ainsi $x = 30{,}54747\ldots$ est bien un nombre rationnel.

PROPRIÉTÉ : si le développement décimal d'un nombre réel est périodique à partir d'un certain rang, alors ce nombre est rationnel.