LEÇON 21 : PARTIE ENTIÈRE & PARTIE FRACTIONNAIRE

① Pour un nombre réel en général

(par opposition à la partie entière plafond, notée $\lceil x \rceil$, et qui est le plus petit entier supérieur ou égal à x)

DÉFINITION : on appelle partie entière de x (ou partie entière plancher) le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x. On le note $\lfloor x \rfloor$.

Ex : $\lfloor 2{,}45 \rfloor = 2$ $\qquad \lfloor -1{,}45 \rfloor = -2$ ← on veut un entier inférieur

$\lfloor \pi \rfloor = 3$ $\qquad \lfloor -\pi \rfloor = -4$

La quantité $x - \lfloor x \rfloor$ (« ce qui reste ») s'appelle la partie fractionnaire.

Ex : $3{,}78 = \underbrace{3}_{\text{partie entière}} + \underbrace{0{,}78}_{\text{partie fractionnaire}}$ $\qquad -4{,}12 = \underbrace{-5}_{\text{partie entière}} + \underbrace{0{,}88}_{\text{partie fractionnaire}}$.

PROPRIÉTÉS : pour tout réel x, on a :

i) $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$

ii) $\lfloor x \rfloor = x \iff x \in \mathbb{Z}$

iii) $x - \lfloor x \rfloor \in [0;1[$ (la partie fractionnaire est toujours entre 0 inclus et 1 exclu).

② Arrondis

On le note parfois $\lfloor x \rceil$.

PROPRIÉTÉ : l'entier « le plus proche » de x est $\lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor$.

Ex : $x = 3{,}42 \rightsquigarrow \lfloor 3{,}42 + \frac{1}{2} \rfloor = \lfloor 3{,}92 \rfloor = 3$

mais $x = 3{,}5 \rightsquigarrow \lfloor 3{,}5 + \frac{1}{2} \rfloor = \lfloor 4 \rfloor = 4$ (à partir de « …,5 » la formule donne l'arrondi par excès).

③ Cas des nombres rationnels

⚠ Ce qui suit n'est vrai que lorsque b est positif !

Soit $a \in \mathbb{Z}$ et soit $b \in \mathbb{N}^*$. On effectue la division euclidienne :

$$\underbrace{a = b \times q + r}_{q \in \mathbb{Z},\ r \in [0;b[} \iff \frac{a}{b} = \underbrace{q}_{\in \mathbb{Z}} + \underbrace{\frac{r}{b}}_{\in [0;1[}.$$

Ainsi : $\boxed{\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor \text{ est le quotient dans la division euclidienne de } a \text{ par } b.}$

④ Petites fractions à connaître ♡

$\frac{1}{2} = 0{,}5$

$\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$ $\quad \frac{2}{3} = 0{,}666\ldots$

$\frac{1}{4} = 0{,}25$ $\quad \frac{2}{4} = 0{,}5$ $\quad \frac{3}{4} = 0{,}75$

$\frac{1}{5} = 0{,}2$ $\quad \frac{2}{5} = 0{,}4$ $\quad \frac{3}{5} = 0{,}6$ $\quad \frac{4}{5} = 0{,}8$

et à partir de là on trouve sans calculatrice :

on cherche un multiple de 4 avant 15

$$\frac{15}{4} = \frac{\overbrace{3 \times 4}^{12} + 3}{4} = \underbrace{3}_{\text{partie entière}} + \underbrace{\frac{3}{4}}_{\text{partie fractionnaire}} = 3{,}75$$

on cherche un multiple de 3 avant 17

$$\frac{17}{3} = \frac{\overbrace{5 \times 3}^{15} + 2}{3} = \underbrace{5}_{\text{partie entière}} + \underbrace{\frac{2}{3}}_{\text{partie fractionnaire}} = 5{,}666\ldots$$

on cherche un multiple de 5 avant 26

$$\frac{26}{5} = \frac{\overbrace{5 \times 5}^{25} + 1}{5} = \underbrace{5}_{\text{partie entière}} + \underbrace{\frac{1}{5}}_{\text{partie fractionnaire}} = 5{,}2$$

Pour un rationnel, la partie fractionnaire est une fraction (d'où son nom !)

Remarque : ceci donne la notation anglo-saxone : $\frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$ $\quad \frac{17}{3} = 5\frac{2}{3}$ $\quad \frac{26}{5} = 5\frac{1}{5}$

Ce sont des sommes, pas des produits.