LEÇON 20 : RÉSOLUTION ALGÉBRIQUE DES INÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ

① Méthode de résolution

RÈGLES :

différent des équations

i) on peut multiplier ou diviser les deux membres d'une inéquation par une même quantité strictement positive ;

ii) on peut multiplier ou diviser les deux membres d'une inéquation par une même quantité strictement négative, à condition de changer le sens de l'inégalité ;

comme les équations

iii) on peut ajouter ou retrancher une même quantité aux deux membres d'une inéquation.

② Exemples de résolutions

a) $3x + 1 \leq 5x$

$-3x$ $\qquad$ $-3x$

$\iff 1 \leq 2x$

$\div 2$ $\qquad$ $\div 2$

$\iff \frac{1}{2} \leq x$

$\mathcal{S} = \left[\frac{1}{2} ; +\infty\right[$.

b) $4x + 2 \geq 6x + 3$

$-6x$ $\qquad$ $-6x$

$\iff -2x + 2 \geq 3$

-2 $\qquad$ -2

$\iff -2x \geq 1$

$\div(-2)$ $\qquad$ on change le sens $\qquad$ (car -2 est négatif) $\qquad$ $\div(-2)$

$\iff x \leq -\frac{1}{2}$

$\mathcal{S} = \left]-\infty ; -\frac{1}{2}\right]$.

c) $7x-5>2x+3$

$\overset{-2x}{\Longleftrightarrow} \quad 5x-5>3$

$\overset{+5}{\Longleftrightarrow} \quad 5x>8$

$\overset{\div 5}{\Longleftrightarrow} \quad x>\dfrac{8}{5}$

$$\mathcal{S}=\left]\frac{8}{5}\,;+\infty\right[$$

d) $\dfrac{3x-1}{4}\geqslant 6x+1$

$\overset{\times 4}{\Longleftrightarrow} \quad 3x-1\geqslant 24x+4$

$\overset{-3x}{\Longleftrightarrow} \quad -1\geqslant 21x+4$

$\overset{-4}{\Longleftrightarrow} \quad -5\geqslant 21x$

$\overset{\div 21}{\Longleftrightarrow} \quad -\dfrac{5}{21}\geqslant x$

$$\mathcal{S}=\left]-\infty\,;-\frac{5}{21}\right].$$

③ Quelques inégalités

RÈGLES DE TRANSITIVITÉ : soient a, b et c trois nombres : [redacted]

i) si $a\leqslant b\leqslant c$ alors $a\leqslant c$;

ii) si $a\leqslant b<c$ (ou $a<b\leqslant c$) alors $a<c$;

iii) si $a\leqslant b\leqslant c$ et $c=a$, alors en fait $a=b=c$.

Exemples :

car un carré est toujours positif

a) soit $x\in\mathbb{R}$, alors $x^2\geqslant 0$, donc $x^2+1\geqslant 1$, et en particulier $x^2+1>0$.

b) soient $a,b\in\mathbb{R}$; alors $(a+b)^2\geqslant 0 \Longleftrightarrow a^2+2ab+b^2\geqslant 0$

$\Longleftrightarrow a^2+b^2\geqslant -2ab$

et $(a-b)^2\geqslant 0 \Longleftrightarrow a^2-2ab+b^2\geqslant 0$

$\Longleftrightarrow a^2+b^2\geqslant 2ab.$

En combinant les deux on obtient $a^2+b^2\geqslant \max\{2ab\,;-2ab\}=2\times|a|\times|b|$.

Mieux : $a^2+b^2\geqslant 2\times|ab|\geqslant|ab|$

et l'inégalité est stricte si $ab\neq 0$.

car $|X|=\max\{X\,;-X\}$

$|2ab|=|2|\times|a|\times|b|$
$=2\times|a|\times|b|$