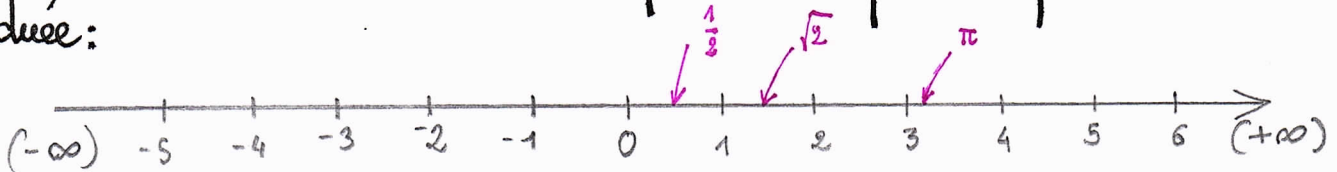


LEÇON 19: INTERVALLES, ENCADREMENTS, VALEUR ABSOLUE

① Intervalles

L'ensemble des nombres réels \mathbb{R} peut être représenté par une droite graduée:



DÉFINITION: un intervalle est une partie « sans trou » de cette droite.

Un intervalle peut être :

• borné :

$[a; b]$		$a \leq x \leq b$	a et b inclus	
$]a; b[$		$a < x < b$	a et b exclus	
$[a; b[$		$a \leq x < b$	a inclus b exclu	
$]a; b]$		$a < x \leq b$	a exclu b inclus	
• ou <u>illimité</u> :	$]-\infty; a]$		$x \leq a$	a inclus
	$]-\infty; a[$		$x < a$	a exclu
	$]a; +\infty[$		$a < x$	a exclu
	$[a; +\infty[$		$a \leq x$	a inclus

Remarque: $-\infty$ et $+\infty$ ne sont pas des nombres, ils ne sont donc jamais inclus dans les intervalles.

PROPRIÉTÉ: l'intersection de deux intervalles est toujours un intervalle.

Exemples :

- $]-3; 10] \cap [2; 5[= [2; 5[$
- $]-10; 1] \cap]-1; 10] =]-1; 1]$

Remarque: ce n'est pas vrai (en tout cas pas toujours) pour les réunions :

$[-2; 0] \cup [0; 2] = [-2; 2]$ (intervalle) mais $[-3; -2] \cup [1; 4]$ (pas un intervalle).

Trois intervalles particuliers :

$$\emptyset =]a; a[$$

l'ensemble vide

$$\{a\} = [a; a]$$

les singletons

$$\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$$

l'ensemble de tous les nombres

Remarque: lorsqu'on enlève un (ou plusieurs) nombre(s) à \mathbb{R} , on obtient des réunions d'intervalles:

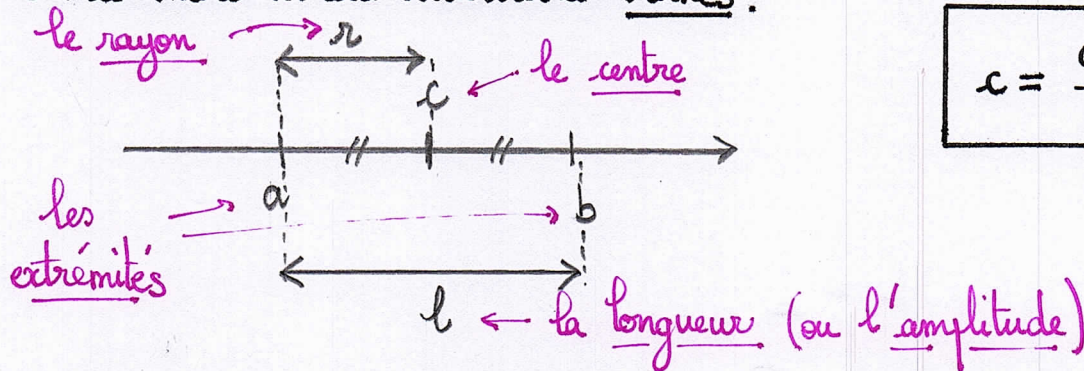
$$\mathbb{R} - \{3\} =]-\infty; 3[\cup]3; +\infty[$$

$$\mathbb{R} - \{-2; 2\} =]-\infty; -2[\cup]-2; 2[\cup]2; +\infty[$$

Le ne sont pas des intervalles car il y a des « trous ».

② Géométrie des intervalles

On considère ici des intervalles bornés.



$$l = b - a$$

$$r = \frac{b - a}{2}$$

$$c = \frac{a + b}{2}$$

$$a = c - r$$

$$b = c + r$$

③ Encadrements

DÉFINITION: la valeur absolue de x est ce qu'il en reste quand on lui retire son signe, autrement dit:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \text{ est positif} \\ -x & \text{si } x \text{ est négatif.} \end{cases}$$

⚠ La valeur absolue est toujours positive.

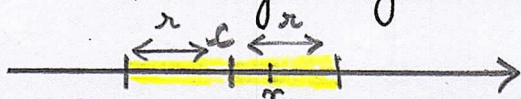
PROPRIÉTÉ: $|y - x|$ est la distance entre les nombres x et y .

Exemples: « x et y sont à moins de 10^{-3} l'un de l'autre »

$$\Leftrightarrow \text{« } y \text{ est égal à } x \text{ à } 10^{-3} \text{ près »} \Leftrightarrow |y - x| \leq 10^{-3}$$

$$\Leftrightarrow -10^{-3} \leq y - x \leq 10^{-3}$$

$$\Leftrightarrow x - 10^{-3} \leq y \leq x + 10^{-3}$$



$$|x - c| \leq r \Leftrightarrow c - r \leq x \leq c + r$$