POLYNÔMES

TP

On considère, dans ce document, uniquement des polynômes à coefficients rationnels ; c'est-à-dire des éléments de $\mathbf{Q}[X]$. On utilisera donc les rationnels de python

```
from fractions import Fraction
```

dont on rappelle le fonctionnement : on crée une fraction a/b (avec $a \in \mathbf{Z}$ et $b \in \mathbf{N}*$) en écrivant x = `Fraction(`a`, `b`)`. Si b est égal à 1, il n'est pas nécessaire de le mentionner. Lorsque x est créé, on accède (si besoin) à son numérateur et à son dénominateur en écrivant respectivement x`.numerator` et x`.denominator`. Le calcul avec les fractions est *exact* (si grandes soient-elles) et les résultats sont toujours irréductibles.

Partie I — Représentation des éléments de $\mathbf{Q}[X]$

Puisqu'un polynôme est une suite presque nulle, représentons

$$P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_dX^d$$

par la liste `[`a_0`, `a_1`, ..., `a_d`]`. On dira que la représentation est *normalisée* si $a_d \neq 0$. Voici quelques exemples.

```
Zéro = []
Un   = [Fraction(1)]
X    = [Fraction(0), Fraction(1)]
```

Exercice 1 — Définir les polynômes $A = X^2 - 2$ et $B = X^3 + X + 1$.

Exercice 2 — Les coefficients

1) Écrire le programme `Coefficient(P, i)` qui renvoie le coefficient de X^i dans P. On notera que i peut être plus grand que le degré de P.
2) En déduire le programme `CoefficientConstant(P)`.
3) Écrire un programme `SommeDesCoefficients(P, f)` qui étant donnée une fonction $f : \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}$ calcule et renvoie $f(a_0) + f(a_1) + f(a_2) + \dots$.
4) Enfin écrire le programme `CoefficientDominant(P)`.

Exercice 3 — Degré et valuation. En utilisant

```
from numpy import inf
```

écrire les programmes `Degré(P)` et `Valuation(P)`.

Exercice 4 — Écritures normalisées. Écrire le programme `Normaliser(P)` qui modifie la liste P (sans changer le polynôme qu'elle représente) de sorte à ce qu'elle soit vide, ou bien que son dernier coefficient soit non nul.

Exercice 5 — Les trois opérations de l'anneau $\mathbf{Q}[X]$

1) Écrire le programme `add(A, B)` qui construit (la liste représentant) la somme des polynômes A et B.
2) Puis écrire le programme `sstr(A, B)`.

3) Enfin, écrire le programme `mul(A, B)`.

Exercice 6 — Voici une application de l'exercice précédent.

1) Quelle est l'écriture développée de $(\mathrm{X}+1)^n$?

2) En déduire un programme `Binomiaux(`n`)` qui construit la liste des coefficients binomiaux k parmi n, pour k allant de 0 à n.

Exercice 7 — Autre application, plus sophistiquée. Soit p un entier naturel. Pour $n \geqslant 0$ on définit

$$\mathrm{S}_p(n) = 0^p + 1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p.$$

1) Que valent $\mathrm{S}_0(n)$, $\mathrm{S}_1(n)$ et $\mathrm{S}_2(n)$?

2) Prouver la relation

$$\mathrm{S}_p(n) = \frac{1}{n+1}\left((n+1)^{p+1} - \sum_{\ell=0}^{p-1}\binom{p}{\ell}\mathrm{S}_\ell(n)\right).$$

3) En déduire que la fonction S_p est en fait polynomiale, et écrire le programme `Sommes(`$p_{\max}$`)` qui construit et renvoie la liste `[`S_0`, `S_1`, ..., `$\mathrm{S}_{p_{\max}}$`]` (qui est donc une liste de listes).

Partie II — Racines rationnelles

Exercice 8 — ?

1) ?