RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS SCALAIRES

§1. Généralités

Exercice 1 — Écrire le programme `Dichotomie(`f`,` a`,` b`, ε = 1e-7)`.

Exercice 2 — On note a_n et b_n les valeurs des variables a_ et b_ dans l'agorithme de dichotomie du cours, au début de l'itération n (avec $n = 0, 1, 2, 3, \dots$).

a) Montrer que $(b_{n+1} - a_{n+1}) = (b_n - a_n)/2$.

b) En déduire, en fonction de ε, le nombre d'itérations effectuées.

c) Si $f(a) \times f(b) \leqslant 0$, prouver qu'à chaque étape on a $f(a_n) \times f(b_n) \leqslant 0$.

d) Supposons qu'on laisse une infinité d'itérations se produire. Prouver que les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ sont adjacentes.

e) Montrer que si f est continue, alors elle s'annule au moins une fois dans $[a\,;b]$.

f) Soit x la valeur renvoyée. Prouver qu'il existe $x^* \in [a\,;b]$ tel que $f(x^*) = 0$ et tel que $|x - x^*| \leqslant \varepsilon$.

Exercice 3 — Soit g une fonction continue sur $[a\,;b]$, et soit k un réel entre $g(a)$ et $g(b)$. Écrire un programme qui calcule et renvoie un nombre x tel que $g(x) = k$, après avoir justifié qu'un tel nombre existe.

§2. Sur un intervalle ouvert

Exercice 4 — Soit $f :]-\infty\,;+\infty[$ une fonction croissante, qui s'annule en changeant de signe (en particulier une seule fois).

a) Prouver qu'il existe un entier n tel que $f(2^n) \geqslant 0$.

b) De même qu'il existe un entier m tel que $f(2^m) \leqslant 0$.

c) En déduire un programme `Zéro(`f`, ε)` qui calcule et renvoie l'unique zéro de f.

Exercice 5 — Pour chaque $y \geqslant -1/e$, on considère l'équation $xe^x = y$.

a) Prouver que cette équation possède une unique solution sur $[-1\,;+\infty[$. On la notera $\mathrm{W}(y)$.

b) Écrire le programme `LambertW(`y`)` qui calcule ce $\mathrm{W}(y)$.

c) Comment obtenir la courbe représentative de W avec Python ?

Exercice 6

a) Montrer que l'équation $\tan(x) = x$ possède une unique solution (qu'on notera x_n) sur l'intervalle $]n\pi - \pi/2\,;\,,\pi + \pi/2[$.

b) Écrire un programme qui calcule ce x_n à ε près.

c) Déterminer expérimentalement la limite de $x_n - n\pi$.

d) Puis la limite de $n \times (n\pi + \pi/2 - x_n)$.

e) Quelle approximation en déduit-on pour x_n, lorsque n est assez grand ?

§3. Plusieurs points d'annulation

Exercice 7 — Zéros de première espèce.

a) Écrire un programme `Subdivision(`a`,` b`, N = 997)` qui renvoie une subdivision régulière en N points de l'intervalle $[a\,;b]$.

b) En déduire un programme `ChangementDeSignes(`f`,` a`,` b`)` qui renvoie une liste de couples (u, v) tels que f s'annule en changeant de signe une fois (et une seule) sur $]u\,;v[$.

c) Écrire un programme `ZérosPremièreEspèce(`f`,` a`,` b`)` qui renvoie la liste de tous les points de $[a\,;b]$ en lesquels f s'annule en changeant de signe.

d) Comment être sûr de ne pas obtenir plusieurs fois le même zéro ?

Exercice 8 — Zéros de deuxième espèce.

a) On suppose que f s'annule en x, mais reste de signe constant sur $]x - \delta\,;x + \delta[$. Prouver que x est un extremum local.

b) On suppose que f est dérivable, et qu'elle n'est constante sur aucun intervalle (non trivial). Rappeler le lien entre les extremums locaux et la dérivée.

c) Écrire un programme `Dérivée(`f`)` qui construit et renvoie un programme `df` calculant la dérivée de f.

d) En déduire un programe `ZérosDeuxièmeEspèce(`f`,` a`,` b`)` qui détermine la liste des points de $[a\,;b]$ où f s'annule sans changer de signe (et sans rester constante).

Exercice 9 — Tous les zéros.

a) En considérant $f(x) = x^2 \times \sin(1/x)$, montrer qu'il est possible pour f de s'annuler en un point x, sans pour autant être dans l'un des trois cas précédemment suggérés : en restant constante, en changeant de signe, ou sans changer de signe.

b) On dira qu'une fonction est *sympathique* s'il existe un nombre δ tel que sur chaque intervalle de longueur δ, elle ne s'annule qu'un nombre fini de fois. Écrire un programme `Zéros(`f`,` a`,` b`,` δ`)` qui étant donnée une fonction continue et sympathique, renvoie la liste des points où elle s'annule.

c) Comment donner la valeur par défaut $(b-a)/1000$ à δ, dans le programme précédent ?

§4. Cas des polynômes

Exercice 10 — On donne la liste `[`a_0`,` a_1`, ...,` a_d`]` des coefficients d'une fonction polynomiale $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_dx^d$. Écrire un programme qui construit et renvoie un programme f qui calcule cette fonction.

Exercice 11

a) Écrire un programme `CoefDérivée(A)` qui étant donnée la liste `A` de coefficients d'une fonction polynomiale f, construit et renvoie la liste des coefficients de f'.

b) On suppose que f possède d racines réelles distinctes. Écrire un programme qui les calcule toutes.

Exercice 12 — ?

Exercice 13 — ?

Exercice 14 — ?

Exercice 15 — ?

§5. Méthode de Newton

Exercice 16 — ?

Exercice 17 — ?

Exercice 18 — ?

Exercice 19 — ?