

ALGORITHMES POUR LES FONCTIONS

§1. Dérivées, limites, ordres de grandeur

Exercice 1 — On donne un programme f calculant une fonction affine, dont l'expression $f(x) = mx + p$ ($m \neq 0$) est inconnue. Écrire un programme `CoefficientsAffine(f)` qui détermine et renvoie le couple (m, p) .

Exercice 2 — On donne un programme g calculant une fonction du deuxième degré, dont l'expression $g(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) est inconnue. Écrire un programme `CoefficientsTrinôme(g)` qui détermine et renvoie le triplet (a, b, c) .

Exercice 3 — On donne un programme h calculant une fonction de la forme $h(x) = Kx^\alpha$ ($K \neq 0$), mais dont l'expression est inconnue. En utilisant la fonction logarithme, écrire un programme qui détermine et renvoie le couple (α, K) .

Exercice 4 — On donne un programme k calculant une fonction de la forme $k(x) = Ae^{ax}$ ($A \neq 0$), mais dont l'expression est inconnue. Écrire un programme qui calcule et renvoie le couple (A, a) .

Exercice 5 — On donne un programme P calculant une fonction polynomiale

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_dx^d$$

dont l'expression est inconnue.

a) En utilisant la fonction logarithme, proposer un programme `Degré(P)` qui estime la valeur de d .

b) Puis écrire un programme `TermeDom(P)` qui détermine et renvoie le couple (d, a_d) .

Exercice 6 — ?

Exercice 7 — ?

Exercice 8 — ?

Exercice 9 — ?

§2. Calculs de sommes

Exercice 10 — Pour $x \in]-1; 1[$ on donne la formule

$$\left| \arctan(x) - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \right| \leq \frac{|x|^{2N+1}}{2N+1}.$$

a) Écrire un programme `Trouver_N(x, ε)` qui détermine le plus petit entier naturel N tel que

$$\frac{|x|^{2N+1}}{2N+1} \leq \varepsilon.$$

b) En déduire un programme qui calcule une valeur approchée de $\arctan(x)$ à ε près.

Exercice 11 — **La formule de Machin.**

a) Si x est une valeur approchée de x^* à ε près, quelle erreur commet-on en remplaçant λx^* par la valeur approchée λx ?

b) Si x et y sont des valeurs approchées à ε près de x^* et y^* respectivement, quelle erreur commet-on en remplaçant $x^* + y^*$ par $x + y$? Et $x^* - y^*$ par $x - y$?

c) En utilisant la *formule de Machin*

$$\pi = 16 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - 4 \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$$

écrire un programme qui calcule une valeur approchée de π à ε près.

Exercice 12 — ?

Exercice 13 — ?

§3. Extremums

Exercice 14 — On donne un programme f qui calcule une fonction du troisième degré $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, dont l'expression est inconnue.

a) Proposer un programme qui détermine si cette fonction est strictement monotone, et qui renvoie `True` dans ce cas (et `False` sinon).

b) En déduire un programme `NombreZéros(f)` qui détermine le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.

Exercice 15 — **Réels aléatoires.**

a) Que fait la fonction `random` du module `random` ? On s'aidera de la documentation pour répondre.

b) En déduire un programme `Aléa(a = 0, b = 1)` qui renvoie un réel au hasard dans l'intervalle $[a; b]$.

c) Comment obtenir des réels aléatoires dans $]0; 1[$?

Exercice 16 — **Extremums naïfs.**

a) En utilisant l'exercice précédent, écrire un programme `Maximum(f, a, b)` qui détermine une valeur approchée du maximum de f sur le segment $[a; b]$.

b) Comment en déduire un programme `Minimum(f, a, b)`, sans tout ré-écrire ?

Exercice 17 — ?

§4. Intégrales, primitives

Exercice 18 — On rappelle la *formule des rectangles*, valable pour une fonction $f : [a; b]$ dérivable et dont la dérivée est bornée :

$$\left| \int_a^b f(t) dt - h \times \sum_{k=0}^{N-1} f(a + kh) \right| \leq \frac{(b-a)^2}{2N} \times \sup_{[a; b]} |f'|,$$

où l'on a posé $h = (b-a)/N$. On souhaite l'exploiter pour calculer

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt.$$

a) Si $x \geq 1$, comment majorer la dérivée de la fonction inverse sur $[1; x]$?

b) En déduire un programme `Trouver_N(x, ε)` qui détermine un N tel que

$$\frac{(x-1)^2}{2N} \times \sup_{[1; x]} |\text{inv}'|.$$

c) En déduire un programme `Ln(x, ε)` qui calcule une valeur approchée à ε près de $\ln(x)$, lorsque $x \geq 1$.

d) Que faire pour les $x \leq 1$?

Exercice 19 — ?

Exercice 20 — ?

Exercice 21 — ?