$1^{\text{ière}}$ générale — mathématiques (spécialité) — chapitre I

FONCTIONS POLYNOMIALES ET RATIONNELLES

Objectifs techniques

1.1 Fonctions polynomiales

T – 1.1) Reconnaître le degré et les coefficients d'une expression polynomiale.

T – 1.2) Développer un produit de deux facteurs.

T – 1.3) Développer un produit de trois facteurs ou davantage.

Exemple :

$$\begin{aligned}(x+3)\times(2x-5)\times(3-4x) &= \big[(x+3)\times(2x-5)\big]\times(3-4x)\\ &= \big[2x^2+6x-5x-15\big]\times(3-4x)\\ &= (2x^2+x-15)\times(3-4x)\\ &= 6x^2+3x-45-8x^3-4x^2+60x\\ &= -8x^3+2x^2+63x-45.\end{aligned}$$

T – 1.4) Dresser le tableau de signes d'une fonction polynomiale dont on connaît une écriture factorisée.

T – 1.5) Résoudre une équation-produit.

T – 1.6) Donner les définitions : « f est croissante sur l'intervalle I », « f est décroissante sur l'intervalle I », « f est monotone sur l'intervalle I », et les trois mêmes en ajoutant « strictement ».

Définition. — Soit $f : \mathscr{D} \to \mathbf{R}$ une fonction et soit $\mathrm{I} \subseteq \mathscr{D}$ un intervalle. On dit que f est *croissante* sur I lorsqu'elle y *préserve* la relation $\leqslant$: pour tous $u, v \in \mathrm{I}$ la relation $u \leqslant v$ implique $f(u) \leqslant f(v)$.

Définition. — Soit $f : \mathscr{D} \to \mathbf{R}$ une fonction et soit $\mathrm{I} \subseteq \mathscr{D}$ un intervalle. On dit que f est *décroissante* sur I lorsqu'elle y *renverse* la relation $\leqslant$: pour tous $u, v \in \mathrm{I}$ la relation $u \leqslant v$ implique $f(u) \geqslant f(v)$.

Définition. — Soit $f : \mathscr{D} \to \mathbf{R}$ une fonction et soit $\mathrm{I} \subseteq \mathscr{D}$ un intervalle. On dit que f est *monotone* sur I lorsqu'elle n'y change pas de sens de variation, c'est-à-dire f est croissante sur I, ou bien f est décroissante sur I.

T – 1.7) Démontrer qu'une fonction n'est pas monotone sur un intervalle.

Exemple : montrons que $f(x) = x^3 - 4x + 2$ n'est pas monotone sur $[0\,;+\infty[$. Soit en essayant au hasard, soit (si c'est autorisé) en s'aidant de la courbe sur la calculatrice, on trouve des valeurs qui permettent de conclure. Par exemple $f(0) = 2$, $f(1) = -1$ et $f(2) = 2$. On a $f(0) < f(1)$ et $f(1) > f(2)$, donc f n'est pas monotone sur $[0\,;\,+\infty[$.

1.2 Racines d-ièmes

T – 1.8) Connaître les carrés parfaits jusqu'à 20^2, ainsi que $25^2 = 625$, $30^2 = 900$ et $32^2 = 1\,024$.

nombre	carré
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36

nombre	carré
7	49
8	64
9	81
10	100
11	121
12	144
13	169

nombre	carré
14	196
15	225
16	256
17	289
18	324
19	361
20	400

T – 1.9) Donner les définitions de : « $\sqrt[d]{x}$ » (lorsque d est pair), « $\sqrt[d]{x}$ »(lorsque d est impair).

Définition. — Soit d un entier pair au moins égal à deux et soit x un réel *positif*. On appelle *racine d-ième* de x l'unique nombre *positif* qui, multiplié d fois par lui-même, donne x. On le note $\sqrt[d]{x}$.

Remarque : la racine d-ième d'un réel strictement négatif n'existe pas.

Définition. — Soit d un entier impair au moins égal à trois et soit x un réel quelconque. On appelle *racine d-ième* de x l'unique nombre qui, multiplié d fois par lui-même, donne x. On le note $\sqrt[d]{x}$.

Exemple : $\sqrt[3]{-27} = -3$, puisque $(-3) \times (-3) \times (-3) = -27$.

T – 1.10) Sans calculatrice, donner les valeurs approchées à 0,001 près de $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{2}/2 = 1/\sqrt{2}$, $\sqrt{3}/3 = 1/\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}/2$.

Les deux premiers sont à apprendre par cœur.

racine carrée	valeur approchée
$\sqrt{2}$	1,414...
$\sqrt{3}$	1,732...

Pour les autres, on utilise les propriétés des racines carrées.

Exemples :

$$\sqrt{8} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} = 2 \times \sqrt{2} = 2 \times 1{,}732\ldots \simeq 3{,}464\ldots$$

$$\sqrt{300} = \sqrt{100} \times \sqrt{3} = 10 \times 1{,}732\ldots \simeq 17{,}32\ldots$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1{,}414\ldots}{2} \simeq 0{,}707\ldots$$

$$\sqrt{0{,}03} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{100}} = \frac{1{,}732\ldots}{10} \simeq 0{,}173\,2\ldots$$

T – 1.11) Trouver les valeurs interdites/le domaine de définition d'une expression avec des radicaux.

Exemple : déterminons le domaine de définition de $f(x) = \sqrt{4 - \sqrt{x}}$. Il y a deux racines carrées donc deux problèmes (éventuels) à étudier : $f(x)$ a du sens si et seulement si, d'une part, x est positif (pour que $\sqrt{x}$ existe) et, d'autre part, $4 - \sqrt{x}$ est positif (pour que $\sqrt{4 - \sqrt{x}}$ existe). Or lorsque x est positif on a

$$4 - \sqrt{x} \geqslant 0 \quad \overset{+\sqrt{x}}{\Longleftrightarrow} \quad 4 \geqslant \sqrt{x} \quad \overset{\uparrow^2}{\Longleftrightarrow} \quad 16 \geqslant x.$$

En conclusion, $f(x)$ a du sens lorsqu'on a simultanément $x \geqslant 0$ et $x \leqslant 16$, c'est-à-dire lorsque $x \in [0\,;\,16]$.

T – 1.12) Résoudre les équations de la forme $\mathrm{X}^d = y$ avec $d \geqslant 2$.

Exemples.

a) [Puissances paires.] Résolvons l'équation $(x+3)^2 = 5$. On a

$$\begin{aligned}(x+3)^2 = 5 &\overset{\sqrt{\ }}{\iff} x+3 = \sqrt{5} \quad \text{ou} \quad x+3 = -\sqrt{5}\\ &\overset{-3}{\iff} x = \sqrt{5}-3 \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{5}-3.\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc $\left\{-\sqrt{5}-3\,;\ \sqrt{5}-3\right\}$.

b) [Puissances impaires.] Résolvons l'équation $(2x-5)^7 = 12$. On a

$$(2x-5)^7 = 12 \quad \overset{\sqrt[7]{\ }}{\iff} \quad 2x-5 = \sqrt[7]{12} \quad \overset{+5}{\iff} \quad 2x = 5+\sqrt[7]{12} \quad \overset{\div 2}{\iff} \quad x = \frac{5+\sqrt[7]{12}}{2}.$$

T – 1.13) Utiliser la quantité conjuguée.

Exemple :

$$\begin{aligned}\frac{4-\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}} &= \frac{(4-\sqrt{2})\times(3-2\sqrt{2})}{(3+2\sqrt{2})\times(3-2\sqrt{2})} = \frac{12-3\sqrt{2}-8\sqrt{2}+2\times(\sqrt{2})^2}{3^2-(2\sqrt{2})^2}\\ &= \frac{12-11\sqrt{2}+4}{9-8} = \frac{16-11\sqrt{2}}{1} = 16-11\sqrt{2}.\end{aligned}$$

T – 1.14) Simplifier des expressions avec des radicaux (en utilisant leurs propriétés).

Exemples.

a) $\dfrac{8}{\sqrt{2}} = \dfrac{4\times 2}{\sqrt{2}} = \dfrac{4\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 4\times\sqrt{2}$.

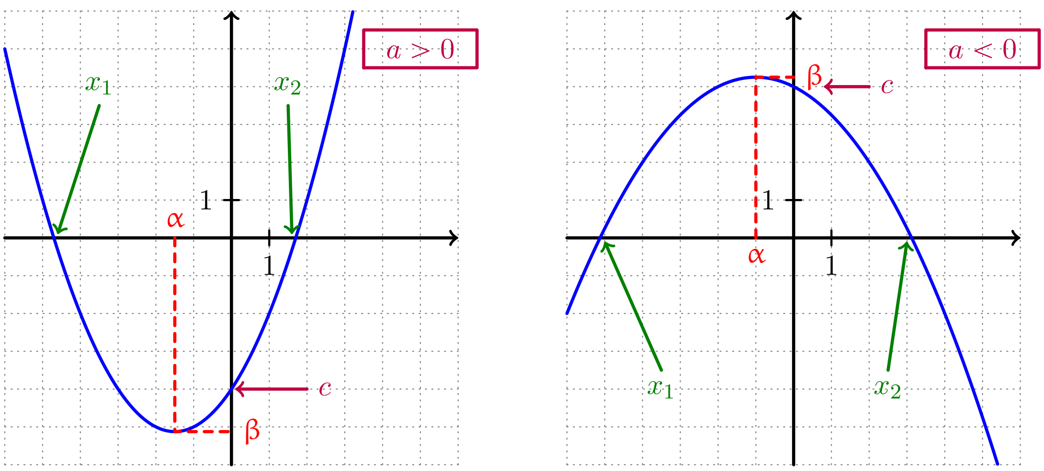
b) $\dfrac{\sqrt{30}\times\sqrt{40}}{\sqrt{27}} = \dfrac{\sqrt{3}\times\sqrt{10}\times\sqrt{4}\times\sqrt{10}}{\sqrt{3}\times\sqrt{9}} = \dfrac{10\times 2}{3} = \dfrac{20}{3}$.

c) $\left(\sqrt{\sqrt[3]{5}}\right)^6 = \left(\sqrt{\sqrt[3]{5}}\right)^{2\times 3} = \left(\left(\sqrt{\sqrt[3]{5}}\right)^2\right)^3 = \left(\sqrt[3]{5}\right)^3 = 5$.

1.3 *Propriétés des fonctions du deuxième degré*

T – 1.15) Reconnaître a, b, c, x_1, x_2, α et β sur les expressions correspondantes.

T – 1.16) Trouver c, α, β, x_1 et x_2, ainsi que le signe de a, sur une courbe.



T – 1.17) Déterminer α et β à partir de a, b et c et en déduire l'écriture canonique.

Exemple : soit $f(x) = 2x^2 - 4x - 1$. Il s'agit d'un trinôme, avec $a = 2$, $b = -4$ et $c = -1$. Les coordonnées du sommet de la parabole qui le représente sont

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2 \times 2} = 1 \qquad \text{et} \qquad \beta = f(\alpha) = f(1) = 2 \times 1^2 - 4 \times 1 - 1 = -3.$$

L'écriture canonique est donc

$$f(x) = a \times (x - \alpha)^2 + \beta = 2 \times (x - 1)^2 - 3.$$

T – 1.18) Trouver les antécédents à partir de l'écriture canonique.

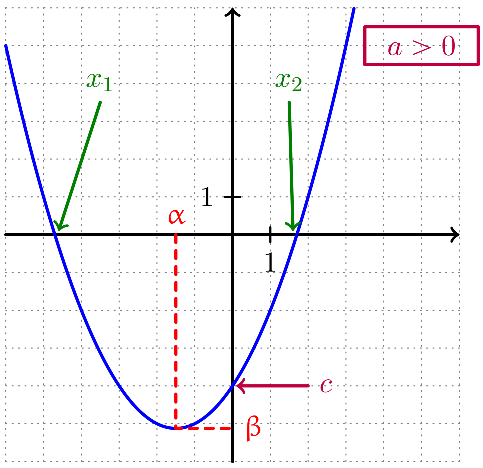
Exemple : soit $f(x) = 3 \times (x + 2)^2 - 7$. Déterminons les antécédents de 5 par f. On a

$$f(x) = 5 \iff 3 \times (x+2)^2 - 7 = 5 \overset{+5}{\iff} 3 \times (x+2)^2 = 12 \overset{\div 3}{\iff} (x+2)^2 = 4$$
$$\overset{\sqrt{\ }}{\iff} x + 2 = 2 \quad \text{ou} \quad x + 2 = -2 \overset{-2}{\iff} x = 0 \quad \text{ou} \quad x = -4.$$

Les antécédents de 5 par f sont donc -4 et 0.

T – 1.19) Déterminer a, b et c par indentification à partir d'une courbe ou d'informations similaires.

Exemple.



1.4 Relations entre les coefficients et les racines

T – 1.20) Résoudre $\begin{cases} x_1 + x_2 = S \\ x_1 \times x_2 = P \end{cases}$ en se ramenant à une fonction du deuxième degré, puis en utilisant l'écriture canonique ou bien la calculatrice.

Exemple.

T – 1.21) Trouver le terme dominant et le terme constant dans un produit de plusieurs fonctions polynomiales.

Exemple :

$$(x^2 + x + 2) \times (2x - 5) \times (x^3 + 2) = x^2 \times 2x \times x^3 + \ldots + 2 \times (-5) \times 2 = 2x^6 + \ldots - 20.$$

T – 1.22) Trouver le coefficient de x^{n-1} dans le produit de n fonctions affines dont le coefficient directeur vaut 1.

Exemple :

$$(x-4)\times(x-3)\times(x+5)\times(x+12) = x^4 + ((-4)+(-3)+5+12)x^3 + \ldots = x^4 + 10x^3 + \ldots.$$

1.5 Identités remarquables, factorisations forcées

T – 1.23) Connaître et utiliser les identités remarquables du deuxième degré.

T – 1.24) Connaître les identités remarquables du troisième degré.

Propriété. — Soient a et b deux nombres. On a les formules

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \qquad a^3 + b^3 = (a+b)\times(a^2 - ab + b^2),$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3, \qquad a^3 - b^3 = (a-b)\times(a^2 + ab + b^2).$$

T – 1.25) En particulier développer des expressions de la forme $(a+b\sqrt{d})^2$ ou $(a+b\sqrt{d})^3$.
T – 1.26) Mettre une fonction affine en facteur dans une expression polynomiale.
T – 1.27) Utiliser la méthode d'identification des coefficients.

1.6 Fonctions rationnelles

T – 1.28) Trouver les valeurs interdites/le domaine de définition.
T – 1.29) Dresser le tableau de signes d'une fonction rationnelle dont on connaît une écriture factorisée.
T – 1.30) À partir d'une courbe, dresser un tableau de variations (avec les limites) et un tableau de signes.
T – 1.31) Utiliser les produits en croix.
T – 1.32) Étudier une fonction homographique.
T – 1.33) Résoudre une inéquation avec une fonction homographique.
T – 1.34) Faire un changement d'écriture par identification.