1ère générale — Mathématiques (spécialité) — Leçon 3

PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS DU DEUXIÈME DEGRÉ

1 L'écriture développée

Définition (fonction polynomiale du deuxième degré).
Soit $\mathscr{D}$ une partie de $\mathbf{R}$. On dit que $f : \mathscr{D} \to \mathbf{R}$ est une fonction polynomiale du deuxième degré lorsqu'il existe trois nombres a, b et c, avec a différent de zéro, tels que

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

pour tout $x \in \mathscr{D}$.

Remarque. On prendra garde à l'hypothèse $a \neq 0$: si elle n'est pas vérifiée, on n'a plus affaire à une fonction du deuxième degré, mais à une fonction affine, et tout change !

à connaître

Exemple. Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$. Calculer $f(0)$, $\dfrac{f(1) - f(-1)}{2}$ et $\dfrac{f(1) - 2 \times f(0) + f(-1)}{2}$.

i) On a évidemment $f(0) = a \times 0^2 + b \times 0 + c = c$.

ii) Calculons séparément : $f(1) = a \times 1^2 + b \times 1 + c = a + b + c$ et $f(-1) = a \times (-1)^2 + b \times (-1) + c = a - b + c$. De sorte que

$$\frac{f(1) - f(-1)}{2} = \frac{(a+b+c) - (a-b+c)}{2} = \frac{a+b+c-a+b-c}{2} = \frac{2b}{2} = b.$$

iii) Enfin (et là, il s'agit d'avoir de l'intuition : on a trouvé c et b dans les deux premières questions, donc si l'exercice est bien fait on doit trouver a dans la troisième !) en reprenant les valeurs déjà calculées :

$$\frac{f(1) - 2 \times f(0) + f(-1)}{2} = \frac{(a+b+c) - 2 \times c + (a-b+c)}{2} = \frac{a+b+c-2c+a-b+c}{2} = \frac{2a}{2} = a.$$

2 L'écriture canonique

Dans ce paragraphe on considère une fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ définie sur $\mathbf{R}$ tout entier. On rappelle que l'écriture canonique est

$$f(x) = a \times (x - \alpha)^2 + \beta,$$

le coefficient a étant celui de l'écriture développée, et les nombres α et β sont deux autres nombres.

Propriété (écriture canonique pour les fonctions du deuxième degré).
L'écriture canonique existe toujours pour les fonctions du deuxième degré, et de plus elle est unique. On l'obtient avec les formules
$$\alpha = -\frac{b}{2a} \qquad \text{et} \qquad \beta = f(\alpha).$$

Preuve. On développe l'écriture canonique :
$$a \times (x-\alpha)^2 + \beta = a \times [x^2 - 2\alpha x + \alpha^2] + \beta = ax^2 - 2a\alpha x + a\alpha^2 + \beta.$$
En identifiant avec l'écriture $ax^2 + bx + c$, on obtient $-2a\alpha = b$, c'est-à-dire (après division par $-2a$)
$$\alpha = -\frac{b}{2a}.$$
(Au passage, on obtient aussi la formule $a\alpha^2 + \beta = c$.) Enfin, on a
$$f(\alpha) = a \times (\alpha - \alpha)^2 + \beta = a \times 0 + \beta = \beta.$$
C.F.Q.D.

Remarque. Résumons et prenons du recul : pour les fonctions affines (donc de degré 0 ou 1) l'écriture canonique existe toujours, mais elle n'est pas unique. Pour les fonctions du deuxième degré, elle existe toujours et elle est unique. Pour les fonctions du troisième degré ou plus, elle n'existe pas forcément, mais lorsque c'est le cas elle est unique.

3 Courbe représentative

La courbe représentative d'une fonction du deuxième degré est une *parabole*.

Propriété (interprétation graphique de c, α, β et a).
Soit $f(x) = ax^2 + bx + c = a \times (x-\alpha)^2 + \beta$ une fonction du deuxième degré et soit $\mathscr{P}$ la parabole qui la représente (disons dans un repère orthogonal).

i) Le nombre c est l'ordonnée à laquelle $\mathscr{P}$ coupe l'axe verticale (c'est l'image de zéro).

ii) Le *sommet* de la parabole a pour coordonnées $(\alpha\,;\,\beta)$.

iii) Les branches de $\mathscr{P}$ sont tournées vers le haut si a est positif, et vers le bas si a est négatif.

Propriété (axe de symétrie).
Soit $f(x) = ax^2 + bx + c = a \times (x-\alpha)^2 + \beta$ une fonction du deuxième degré et soit $\mathscr{P}$ la parabole qui la représente (toujours dans un repère orthogonal). La droite verticale passant par le sommet de $\mathscr{P}$ est un axe de symétrie de $\mathscr{P}$. Cela signifie que pour tout réel t on a $f(\alpha - t) = f(\alpha + t)$.

Preuve. Commençons par la deuxième partie. Soit t un réel. À partir de l'écriture canonique on a

$$f(\alpha - t) = a \times (\alpha - t - \alpha)^2 + \beta = a \times (-t)^2 + \beta = at^2 + \beta$$

et

$$f(\alpha + t) = a \times (\alpha + t - \alpha)^2 + \beta = a \times t^2 + \beta = at^2 + \beta.$$

Les deux quantités sont donc bien égales. Maintenant voyons le rapport avec un axe de symétrie. Notons $\mathscr{L}$ la droite verticale passant par le sommet de $\mathscr{P}$. Soit M un point de $\mathscr{P}$, de coordonnées $(x, f(x))$, et soit M$'$, de coordonnées $(x' ; y')$, son symétrique par rapport à $\mathscr{L}$: on a $y' = f(x)$ (parce que le segment [MM$'$] est horizontal) et

$$\frac{x + x'}{2} = \alpha \qquad \Leftrightarrow \qquad x + x' = 2\alpha \qquad \Leftrightarrow \qquad x' = 2\alpha - x$$

(parce que le milieu de [MM$'$] est un point de $\mathscr{L}$, qui a donc une abscisse égale à α). On va montrer que M$' \in \mathscr{P}$, c'est-à-dire que $y' = f(x')$. Soit $t = x - \alpha$: on a $x = \alpha + t$, donc

$$y' = f(x) = f(\alpha + t) = f(\alpha - t) = f(\alpha - (x - \alpha)) = f(2\alpha - x) = f(x'),$$

c'est bien ce que voulait. Soit s la symétrie axiale par rapport à $\mathscr{P}$. On vient de démontrer que $s(\mathscr{P}) \subseteq \mathscr{P}$. On en déduit que $\mathscr{P} = s(s(\mathscr{P})) \subseteq s(\mathscr{P})$, et par double-inclusion que $\mathscr{P} = s(\mathscr{P})$, autrement dit $\mathscr{L}$ est bien un axe de symétrie de $\mathscr{P}$. **C.F.Q.D.**

4 L'écriture factorisée