1ère générale — Mathématiques (spécialité) — Leçon 2

RACINES $d^{\text{ièmes}}$

1 Définition des racines $d^{\text{ièmes}}$

Elle n'est pas la même selon que d est pair ou impair. Commençons par le cas facile : d impair.

Définition (racines $d^{\text{ièmes}}$ avec d impair).
Soit d un entier impair au moins égal à trois et soit x un réel quelconque. On appelle *racine $d^{\text{ième}}$* de x l'unique nombre qui, multiplié d fois par lui-même, donne x. On le note $\sqrt[d]{x}$.

Cela veut donc dire qu'on a, *par défintion*, la formule

$$\sqrt[3]{x} \times \sqrt[3]{x} \times \sqrt[3]{x} = x \qquad \text{ou encore} \qquad \left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = x.$$

Et plus généralement, lorsque d est impair, on a donc $\left(\sqrt[d]{x}\right)^d = x$, valable pour tout réel x.

à connaître

Exemples.

i) On a $\sqrt[3]{-64} = -4$, puisque $(-4) \times (-4) \times (-4) = -64$.

ii) [Côté d'un cube dont le volume est donné.] Le volume d'un cube de côté c est donné par la formule $\mathscr{V} = c^3$. Si on cherche à exprimer le côté en fonction du volume, on a donc

$$c = \sqrt[3]{\mathscr{V}}.$$

iii) [Rayon d'une boule dont le volume est donné.] Le volume d'une boule de rayon R est donné par la formule $\mathscr{V} = 4/3 \times \pi \times \mathrm{R}^3$. Si on cherche à exprimer le rayon en fonction du volume, on a donc

$$\mathrm{R} = \sqrt[3]{\frac{3 \times \mathscr{V}}{4 \times \pi}}.$$

iv) [Côté d'un tétraèdre régulier dont le volume est donné.] Le volume d'un tétraèdre régulier de côté a est donné par la formule $\mathscr{V} = a^3/\sqrt{72}$. Si on cherche à exprimer le côté en fonction du volume, on a donc

$$a = \sqrt[3]{\sqrt{72} \times \mathscr{V}}.$$

Propriété (racines $d^{\text{ièmes}}$ d'un nombre négatif).
Soit d un entier impair au moins égal à trois et soit x un nombre réel. On a $\sqrt[d]{-x} = -\sqrt[d]{x}$.

Preuve. D'après la règle des signes (dans un produit, les signes $-$ se simplifient deux par deux, donc s'il y en a un nombre impair, c'est comme s'il y en a exactement un) on a

$$(-\sqrt[d]{x})^d = \underbrace{(-\sqrt[d]{x}) \times (-\sqrt[d]{x}) \times \ldots \times (-\sqrt[d]{x})}_{d \text{ fois le } -\sqrt[d]{x}} = -(\underbrace{\sqrt[d]{x} \times \sqrt[d]{x} \times \ldots \times \sqrt[d]{x}}_{d \text{ fois le } \sqrt[d]{x}}) = -x.$$

Donc $-\sqrt[d]{x}$ est un nombre qui, multiplié d fois par lui-même, donne $-x$. Par définition il est donc égal à $\sqrt[d]{-x}$. **C.Q.F.D.**

Passons au cas où d est pair. On voit immédiatement la difficulté : lorsqu'on multiplie un nombre d fois par lui-même et que d est pair, on obtient (d'après la règle des signes) toujours un nombre positif. On ne peut donc pas définir $\sqrt[d]{x}$ lorsque d est pair et x est négatif.

Définition (racines $d^{\text{ièmes}}$ avec d pair).
Soit d un entier pair au moins égal à deux et soit x un réel positif. On appelle *racine* $d^{\text{ième}}$ de x l'unique nombre *positif* qui, multiplié d fois par lui-même, donne x. On le note $\sqrt[d]{x}$ (ou simplement $\sqrt{x}$ lorsque $d = 2$).

Remarque. On est de plus obligé de préciser « l'unique nombre *positif* » parce qu'il y a plusieurs choix possibles de racines $d^{\text{ièmes}}$. Par exemple on a $3 \times 3 = 9$ et $(-3) \times (-3) = 9$: il existe donc deux nombres (3 et -3) qui, multiplié deux fois par eux-mêmes, donnent 9.

à connaître

Exemples.

i) On a $\sqrt{0{,}01} = 0{,}1$, puisque $0{,}1 \times 0{,}1 = 0{,}01$.

ii) [Côté d'un carré dont l'aire est donnée.] L'aire d'un carré de côté c est donnée par la formule $\mathscr{A} = c^2$. Si on cherche à exprimer le côté en fonction de l'aire, on a donc

$$c = \sqrt{\mathscr{A}}.$$

iii) [Rayon d'un cercle dont l'aire est donnée.] L'aire d'un cercle de rayon R est donnée par la formule $\mathscr{A} = \pi \times \mathrm{R}^2$. Si on cherche à exprimer le rayon en fonction de l'aire, on a donc

$$\mathrm{R} = \sqrt{\frac{\mathscr{A}}{\pi}}.$$

iv) [Côté d'un triangle équilatéral dont l'aire est donnée.] L'aire d'un triangle équilatéral de côté a est donné par la formule $\mathscr{A} = \sqrt{3}/4 \times a^2$. Si on cherche à exprimer le côté en fonction de l'aire, on a donc

$$a = \sqrt{\frac{4}{\sqrt{3}} \times \mathscr{A}}.$$

On apprendra par cœur les carrés des petits entiers (et donc les racines carrées correspondantes).

nombre	carré
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36

nombre	carré
7	49
8	64
9	81
10	100
11	121
12	144
13	169

nombre	carré
14	196
15	225
16	256
17	289
18	324
19	361
20	400

Par exemple $\sqrt{361} = 19$ (puisque $19^2 = 361$). On apprendra aussi $25^2 = 625$ (donc $\sqrt{625} = 25$), $30^2 = 900$ (donc $\sqrt{900} = 30$) et $32^2 = 1\,024$ (donc $\sqrt{1\,024} = 32$).

2 Compatibilité des racines $d^{\text{ièmes}}$ avec les multiplications et divisions

a) *Les formules à connaître*

Propriétés (racines $d^{\text{ièmes}}$ dans les multiplications et les divisions).
Soit d un entier au moins égal à deux et soient a et b deux nombres réels (qu'on prendra positifs lorsque d est pair).
i) On a $\sqrt[d]{a \times b} = \sqrt[d]{a} \times \sqrt[d]{b}$.

ii) Lorsque b est différent de zéro, on a de plus $\sqrt[d]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[d]{a}}{\sqrt[d]{b}}$.

Preuves.
i) Prenons les acteurs de l'énoncé. En utilisant la règle sur les puissances $(\mathrm{A} \times \mathrm{B})^d = \mathrm{A}^d \times \mathrm{B}^d$ avec $\mathrm{A} = \sqrt[d]{a}$ et $\mathrm{B} = \sqrt[d]{b}$, on a

$$(\sqrt[d]{a} \times \sqrt[d]{b})^d = (\sqrt[d]{a})^d \times (\sqrt[d]{b})^d = a \times b.$$

Si d est impair, $\sqrt[d]{a} \times \sqrt[d]{b}$ est le nombre qui élevé à la puissance d donne $a \times b$, donc $\sqrt[d]{a} \times \sqrt[d]{b} = \sqrt[d]{a \times b}$. Si d est pair et que a et b sont positif, alors $a \times b$ est positif également, et donc $\sqrt[d]{a} \times \sqrt[d]{b}$ est le nombre positif qui élevé à la puissance d donne $a \times b$, donc là aussi $\sqrt[d]{a} \times \sqrt[d]{b} = \sqrt[d]{a \times b}$.
ii) On fait la même démonstration, en utilisant cette fois-ci la règle $(\mathrm{A}/\mathrm{B})^d = \mathrm{A}^d/\mathrm{B}^d$. **C.Q.F.D.**

La même règle s'applique lorsqu'il y a plus de deux facteurs dans la multiplication, et donc en particulier avec les puissances.

Propriétés (racines $d^{\text{ièmes}}$ dans les grandes multiplications).
i) La formule précédente s'étend à un produit de plusieurs termes : quelques que soient $n \in \mathbf{N}$ et les réels a_1, a_2, …, a_n (qu'on prendra positifs lorsque d est pair) on a

$$\sqrt[d]{a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_n} = \sqrt[d]{a_1} \times \sqrt[d]{a_2} \times \ldots \times \sqrt[d]{a_n}.$$

ii) En particulier, quel que soit le réel a (qu'on prendra positif lorsque d est pair) on a

$$\sqrt[d]{a^n} = \sqrt[d]{\underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ fois le } a}} = \underbrace{\sqrt[d]{a} \times \sqrt[d]{a} \times \ldots \times \sqrt[d]{a}}_{n \text{ fois le } \sqrt[d]{a}} = (\sqrt[d]{a})^n.$$

b) *Simplification des racines carrées*

Lorsque x contient un facteur à la puissance d, disons $x = k^d \times x'$, on peut (avec les règles du paragraphe précédent) écrire

$$\sqrt[d]{x} = \sqrt[d]{k^d \times x'} = \sqrt[d]{k^d} \times \sqrt[d]{x'}.$$

Si d est impair, on a dans tous les cas $\sqrt[d]{k^d} = \sqrt[d]{k}^d$, et lorsque d est pair, c'est vrai aussi mais à condition d'avoir choisi k positif. Et sous cette seule réserve, on obtient donc la simplification

$$\sqrt[d]{x} = k \times \sqrt[d]{x'}.$$

à connaître

Exemples.

a) $\sqrt{45} = \sqrt{9} \times \sqrt{5} = 3 \times \sqrt{5}$.

b) $\sqrt[3]{200} = \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{25} = 2 \times \sqrt[3]{25}$.

c) $\dfrac{3}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{3} \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

c) *Puissances*

On a vu que $\sqrt[d]{x^n} = (\sqrt[d]{x})^n$ dans tous les cas lorsque d est impair, et avec x positif lorsque d est pair. Mais lorsque l'exposant n est lui-même pair, x^n est positif, donc on peut considérer sa racine d-ième même pour un d pair.

Propriété (racine carrée et valeur absolue).

i) Quel que soit $x \in \mathbf{R}$, lorsque n est pair on a $\sqrt[d]{x^n} = (\sqrt[d]{|x|})^n$.

ii) En particulier si n est un multiple de d on a $\sqrt[d]{x^n} = |x|^{n/d}$.

iii) Encore plus en particulier pour tous les exposants n pairs et tout $x \in \mathbf{R}$ on a $\sqrt[n]{x^n} = |x|$.

Preuves.

i) La propriété du paragraphe a) s'applique aux nombres positifs : on peut donc écrire

$$\sqrt[d]{|x|^n} = (\sqrt[d]{|x|})^n$$

puisque $|x|$ est positif. Mais si n est pair, on a $|x|^n = x^n$ et donc on peut enlever la valeur absolue dans le membre de gauche pour obtenir $\sqrt[d]{x^n} = (\sqrt[d]{|x|})^n$.

ii) Si $n = k \times d$ on a tout simplement

$$\sqrt[d]{x^n} = (\sqrt[d]{|x|})^n = (\sqrt[d]{|x|})^{d \times k} = ((\sqrt[d]{|x|})^d)^k = |x|^k = |x|^{n/d}.$$

iii) Et la dernière formule est un cas particulier de la précédente avec $n = d$ donc $n/d = 1$. **C.Q.F.D.**

d) *Racines carrées emboîtées (cas facile)*

Propriété (racines carrées emboîtées).

Soient d_1 et d_2 deux entiers au moins égaux à deux, soit $d = d_1 \times d_2$, et soit x un nombre (positif si d est pair). Alors

$$\sqrt[d_1]{\sqrt[d_2]{x}} = \sqrt[d]{x} = \sqrt[d_2]{\sqrt[d_1]{x}}.$$

Remarque. On notera l'analogie avec la formule des puissances emboîtées :

$$(x^{d_1})^{d_2} = x^d = (x^{d_2})^{d_1}.$$

e) *Quantité conjuguée*

Ce paragraphe concerne uniquement les racines *carrées* (donc $d = 2$). La *quantité conjuguée* d'une expression de la forme $x \pm \sqrt{y}$ est $x \mp \sqrt{y}$ (on l'obtient donc en *changeant le signe* devant $\sqrt{y}$. Une subtilité : x peut lui-même être une racine carrée.

Propriété (utilisation de la forme conjuguée).
Lorsqu'on multiplie une expression par sa quantité conjuguée, les racines carrées « disparaissent ».

Preuve Multplier par la quantité conjuguée permet d'utiliser la troisième identité remarquable : on a

$$(x+\sqrt{y}) \times (x-\sqrt{y}) = x^2 - (\sqrt{y})^2 = x^2 - y$$

et ça marche évidemment avec les deux facteurs échangés :

$$(x-\sqrt{y}) \times (x+\sqrt{y}) = x^2 - (\sqrt{y})^2 = x^2 - y.$$

C.Q.F.D.

On utilise ce principe pour « chasser » les racines carrées des dénominateurs.

à connaître

Exemples.

a) $\dfrac{1}{3+\sqrt{2}} = .$

b) $\dfrac{2+\sqrt{2}}{4-\sqrt{2}} = .$

c) $\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = .$

d) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1} = .$

3 Incompatibilité des racines $d^{\text{ièmes}}$ avec les additions et soustractions

a) *Deux formules fausses*

Voilà un paragraphe qui ne sert à rien, si ce n'est à insister sur ce qu'on *n'a pas* le droit de faire.

Propriétés (racines $d^{\text{ièmes}}$ dans les additions et les soustractions).
Soit d un entier pair au moins égal à deux et soient a et b deux nombres réels.
i) On suppose que a et b sont positifs : $\sqrt[d]{a+b}$ n'est *jamais* égal à $\sqrt[d]{a} + \sqrt[d]{b}$, sauf dans le cas idiot où l'on a pris $a = 0$ ou $b = 0$.
ii) On suppose de plus que a est supérieur ou égal à b : $\sqrt[d]{a-b}$ n'est *jamais* égal à $\sqrt[d]{a} + \sqrt[d]{b}$, sauf si l'on a pris $a = b$ ou $b = 0$.

Preuve.
i) On va la faire pour $d = 2$ seulement (c'est la même démonstration pour $d > 2$, mais on ne connaît pas encore les identités remarquables pour ces puissances-là). Développons :

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 + 2 \times \sqrt{a} \times \sqrt{b} + (\sqrt{b})^2 = a + 2 \times \sqrt{ab} + b.$$

D'autre part on a évidemment $(\sqrt{a+b})^2 = a+b$. Supposons maintenant qu'on a $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$. Alors les carrés sont aussi égaux, c'est-à-dire (d'après les calculs qu'on vient de faire) que l'on a

$$a + 2 \times \sqrt{ab} + b = a + b$$

et donc (après avoir retranché $a + b$ à chaque membre) $2 \times \sqrt{ab} = 0$. Mais ceci implique successivement $\sqrt{ab} = 0$, puis $ab = 0$, puis (d'après le théorème du produit nul) $a = 0$ ou $b = 0$.
ii) Supposons que $\sqrt[d]{a-b} = \sqrt[d]{a} + \sqrt[d]{b}$, ce qui s'écrit aussi

$$\sqrt[d]{a} = \sqrt[d]{a-b} + \sqrt[d]{b}.$$

D'après le *i*), ceci n'est possible que si $a - b = 0$ ou $b = 0$. **C.Q.F.D.**

Propriétés (racines $d^{\text{ièmes}}$ dans les additions et les soustractions, suite).
Soit d un entier impair au moins égal à deux et soient a et b deux nombres réels.
i) La quantité $\sqrt[d]{a+b}$ n'est *jamais* égale à $\sqrt[d]{a} + \sqrt[d]{b}$, sauf si $a = 0$, $b = 0$ ou $a + b = 0$.
ii) De même $\sqrt[d]{a-b}$ n'est *jamais* égale à $\sqrt[d]{a} - \sqrt[d]{b}$, sauf si $a = 0$, $b = 0$ ou $a - b = 0$.

Preuve.
i) Même chose : faute de connaître les identités remarquables pour les grandes puissances, on va se contenter de la démonstration pour $d = 3$. En développant on trouve

$$(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})^3 = (\sqrt[3]{a})^3 + 3 \times (\sqrt[3]{a})^2 \times \sqrt[3]{b} + 3 \times \sqrt[3]{a} \times (\sqrt[3]{b})^2 + (\sqrt[3]{b})^3 = a + 3\sqrt[3]{ab} \times (\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}) + b.$$

D'autre part il est évident que $(\sqrt[3]{a+b})^3 = a + b$. Supposons que $\sqrt[d]{a+b}$ et $\sqrt[d]{a} + \sqrt[d]{b}$ sont égaux : leurs cubes sont donc aussi égaux et d'après les calculs qu'on vient de faire on obtient

$$a + b = a + 3\sqrt[3]{ab} \times (\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}) + b$$

c'est-à-dire $3\sqrt[3]{ab} \times (\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}) = 0$. D'après le théorème du produit nul, on obtient $\sqrt[3]{ab} = 0$ (c'est-à-dire $ab = 0$, c'est-à-dire $a = 0$ ou $b = 0$) ou $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} = 0$ (c'est-à-dire $\sqrt[3]{a} = -\sqrt[3]{b}$, qui en élevant au cube donne $a = -b$, et donc finalement $a + b = 0$).
ii) Supposons que $\sqrt[d]{a-b} = \sqrt[d]{a} + \sqrt[d]{b}$, ce qui s'écrit aussi

$$\sqrt[d]{a} = \sqrt[d]{a-b} + \sqrt[d]{b}.$$

D'après le *i*), ceci n'est possible que si $a - b = 0$ ou $b = 0$ ou $(a - b) + b = 0$ (c'est-à-dire $a = 0$). **C.Q.F.D.**

b) *Les méthodes de simplification à connaître*

On peut tout de même simplifier les quantités de la forme $\sqrt[d]{a} + \sqrt[d]{b}$, lorsqu'on peut les ramener à la racine d'un même nombre. Voyons ceci en images.
$\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2 \times \sqrt{2} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} = \sqrt{8}$.
$\sqrt{12} + \sqrt{75} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} + \sqrt{25} \times \sqrt{3} = 4 \times \sqrt{3} + 5 \times \sqrt{3} = 9 \times \sqrt{3} = \sqrt{81} \times \sqrt{3} = \sqrt{243}$.
$\sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{27} \times \sqrt[3]{3} = 2 \times \sqrt[3]{3} + 3 \times \sqrt[3]{3} = 5 \times \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{125} \times \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{375}$.
$\sqrt{x} + \sqrt{2x} = 1 \times \sqrt{x} + \sqrt{2} \times \sqrt{x} = (1 + \sqrt{2}) \times \sqrt{x}$ et on ne peut pas faire mieux.
$\sqrt{x^3} + \sqrt{4x} = \sqrt{x^2} \times \sqrt{x} + \sqrt{4} \times \sqrt{x} = x \times \sqrt{x} + 2 \times \sqrt{x} = (x + 2) \times \sqrt{x}$

4 Écriture canonique

Propriétés (équations avec des racines carrées).
i) Si d est impair on a
$$\mathrm{X}^d = k \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{X} = \sqrt[d]{k}.$$

ii) Si d est pair et si k est positif, on a
$$\mathrm{X}^d = k \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{X} = \sqrt[d]{k} \quad \text{ou} \quad \mathrm{X} = -\sqrt[d]{k}.$$
Si k est strictement négatif, l'équation $\mathrm{X}^d = k$ n'a pas de solution et si $k = 0$, les deux solutions ci-dessus sont égales (donc inutile de les écrires toutes les deux !).

Lorsque $f(x)$ est une fonction polynomiale dont on connaît l'écriture canonique, on peut résoudre *toutes* les équations de la forme $f(x) = k$ puisque l'inconnue n'y apparaît qu'une seule fois.
a) Résolvons $3 \times (x+2)^4 - 5 = 43$.
$$3 \times (x+2)^4 - 5 = 43 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 3 \times (x+2)^4 = 48 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (x+2)^4 = 16$$
$$\Longleftrightarrow \qquad x+2 = 2 \quad \text{ou} \quad x+2 = -2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = 0 \quad \text{ou} \quad x = -4$$

5 Valeurs numériques

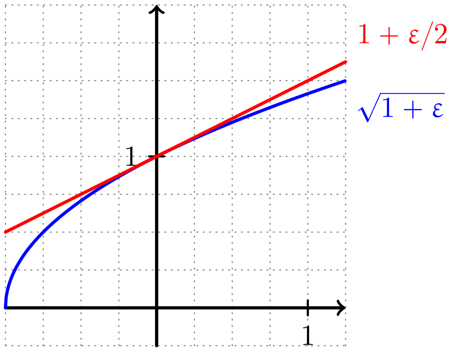
On apprendra par cœur les valeurs approchées de $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$ qui apparaissent partout (et dont on a donc tout le temps besoin).

racine carrée	valeur approchée
$\sqrt{2}$	$1{,}414\ldots$
$\sqrt{3}$	$1{,}732\ldots$

6 Quelques estimations

Terminons cette leçon par un avant-goût du chapitre sur la dérivation.

Propriété (estimations pour les racines $d^{\text{ièmes}}$).
Soit ε un nombre proche de zéro. On a l'approximation
$$\sqrt{1+\varepsilon} \simeq 1 + \frac{\varepsilon}{2},$$
et plus généralement pour un entier d au moins égal à deux
$$\sqrt[d]{1+\varepsilon} \simeq 1 + \frac{\varepsilon}{d}.$$
Plus ε est proche de zéro, plus l'erreur relative commise dans ces approximations est faible.



ε	valeur théorique $\sqrt{1+\varepsilon}$	estimation $1+\varepsilon/2$	erreur relative $\dfrac{(1+\varepsilon/2)-\sqrt{1+\varepsilon}}{\sqrt{1+\varepsilon}}$
0,5	1,224 744...	1,25	$\simeq$ 2,062 %
0,1	1,048 808...	1,05	$\simeq$ 0,114 %
0,025	1,012 422...	1,012 5	$\simeq$ 0,007 622 %
0,001	1,000 499...	1,000 5	$\simeq$ 0,000 012 %
−0,01	0,994 987...	0,995	$\simeq$ 0,001 263 %
−0,05	0,974 679...	0,975	$\simeq$ 0,033 %
−0,2	0,894 427...	0,9	$\simeq$ 0,623 %

Alors la droite rouge est ce qu'on appelle une *tangente* de la courbe bleue.

Exemples.

a) $\sqrt{1{,}3} = \sqrt{1+0{,}3} \simeq 1 + \dfrac{0{,}3}{2} \simeq 1 + 0{,}15 \simeq 1{,}15$. La valeur théorique est $\sqrt{1{,}3} \simeq 1{,}140\,175\ldots$.

b) $\sqrt{0{,}92} = \sqrt{1+(-0{,}08)} \simeq 1 + \dfrac{-0{,}08}{2} \simeq 1 - 0{,}04 \simeq 0{,}96$. La valeur théorique est $\sqrt{0{,}92} \simeq 0{,}959\,166\ldots$.

Voyons comment utiliser ceci pour faire des approximations (par exemple si l'on n'a pas de calculatrice). Soit x un réel positif, et soient a et b nombres *strictement positifs* dont les carrés encadrent x, c'est-à-dire tels que $a^2 \leqslant x \leqslant b^2$. Si x est plutôt proche de a^2, on peut écrire

$$x = a^2 + (x - a^2) = a^2 \times \left(1 + \frac{x-a^2}{a^2}\right),$$

de sorte que

$$\sqrt{x} = \sqrt{a^2 \times \left(1 + \frac{x-a^2}{a^2}\right)} = a \times \sqrt{1 + \frac{x-a^2}{a^2}} \simeq a \times \left(1 + \frac{x-a^2}{2 \times a^2}\right).$$

Si x est plutôt proche de b^2, on peut écrire

$$x = b^2 - (b^2 - x) = b^2 \times \left(1 - \frac{b^2-x}{b^2}\right),$$

de sorte que

$$\sqrt{x} = \sqrt{b^2 \times \left(1 - \frac{b^2-x}{b^2}\right)} = b \times \sqrt{1 - \frac{b^2-x}{b^2}} \simeq b \times \left(1 - \frac{b^2-x}{2 \times b^2}\right).$$

Exemples.

a) Estimer sans calculatrice $\sqrt{405}$. On reconnaît $20^2 = 400$, donc

$$\sqrt{405} = \sqrt{400+5} = \sqrt{400 \times \left(1 + \frac{5}{400}\right)} = 20 \times \sqrt{1 + \frac{5}{400}} \simeq 20 \times \left(1 + \frac{5}{2 \times 400}\right).$$

Ensuite on essaie de simplifier intelligemment le calcul : en distribuant il vient

$$20 \times \left(1 + \frac{5}{2 \times 400}\right) = 20 + \frac{5}{2 \times 20} = 20 + \frac{1}{8} = 20 + 0{,}125$$

ainsi $\sqrt{405} \simeq 20{,}125$ (la calculatrice donne $\sqrt{405} \simeq 20{,}124\,611\,797\ldots$).

b) Estimer sans calculatrice $\sqrt{99}$. On reconnaît $10^2 = 100$ donc

$$\sqrt{99} = \sqrt{100-1} = \sqrt{100 \times \left(1 - \frac{1}{100}\right)} = 10 \times \sqrt{1 - \frac{1}{100}} \simeq 10 \times \left(1 - \frac{1}{2 \times 100}\right).$$

On fait comme dans l'exemple précédent : en distribuant il vient

$$10 \times \left(1 - \frac{1}{2 \times 100}\right) = 10 - \frac{1}{2 \times 10} = 10 - \frac{1}{20} = 10 - 0{,}05 = 9{,}95$$

ainsi $\sqrt{99} \simeq 9{,}95$ (la calculatrice donne $\sqrt{99} \simeq 9{,}949\,874\,371\ldots$).

c) [Plus astucieux : $\sqrt{2}$.] On sait que $(3/2)^2 = 9/4 = 2 + 1/4$ donc

$$\sqrt{2} = \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{9}{4} \times \left(1 - \frac{1}{9}\right)} = \frac{3}{2} \times \sqrt{1 - \frac{1}{9}} \simeq \frac{3}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2 \times 9}\right).$$

En développant on obtient

$$\frac{3}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2 \times 9}\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{12} \simeq 1{,}5 - 0{,}083\,333\ldots \simeq 1{,}416\,666\ldots$$

donc $\sqrt{2} \simeq 1{,}416\,666\ldots$ (la valeur théorique étant $1{,}414\,213\ldots$). On peut aussi donner la fraction obtenue :

$$\sqrt{2} \simeq \frac{3_{\times 6}}{2_{\times 6}} - \frac{1}{12} = \frac{18}{12} - \frac{1}{12} = \frac{17}{12}.$$

d) [Encore plus astucieux : $\sqrt{\pi}$.] On sait que $18^2 = 324$, donc aussi que $1{,}8^2 = 3{,}24 \simeq \pi + 0{,}1$. Donc

$$\sqrt{\pi} \simeq \sqrt{3{,}24 - 0{,}1} \simeq \sqrt{3{,}24 \times \left(1 - \frac{0{,}1}{3{,}24}\right)} \simeq 1{,}8 \times \sqrt{1 - \frac{0{,}1}{3{,}24}} \simeq 1{,}8 \times \left(1 - \frac{0{,}1}{2 \times 3{,}24}\right).$$

En développant on trouve

$$1{,}8 \times \left(1 - \frac{0{,}1}{2 \times 3{,}24}\right) = 1{,}8 - \frac{0{,}1}{2 \times 1{,}8} = 1{,}8 - \frac{0{,}1}{3{,}6}.$$

Là il faut travailler un peu : par exemple

$$\frac{0{,}1}{3{,}6} = \frac{1}{36} = \frac{1}{4 \times 9} \simeq \frac{1}{4} \times 0{,}090\,9\ldots \simeq \frac{1}{4} \times (0{,}09 + 0{,}000\,9\ldots) \simeq (0{,}022\,5 + 0{,}0002\ldots) \simeq 0{,}022\,7\ldots.$$

Finalement $\sqrt{\pi} \simeq 1{,}8 - 0{,}022\,7\ldots \simeq 1{,}777\,3\ldots$ (la calculatrice donne $\sqrt{\pi} \simeq 1{,}772\,453\ldots$).