

FONCTIONS POLYNOMIALES

1 Coefficients

DÉFINITION (FONCTION POLYNOMIALE).

Soit $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbf{R}$ et soit $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction. On dit que f est *polynomiale* s'il existe un entier naturel d et des nombres $a_0, a_1, a_2, \dots, a_d \in \mathbf{R}$ tels que pour tout $x \in \mathcal{D}$ on a

$$f(x) = a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0.$$



Remarque. On rappelle que $x = x^1$ et que $1 = x^0$: on aurait donc pu écrire ci-dessus $a_1 x^1$ (à la place de $a_1 x$) et $a_0 x^0$ (à la place de a_0).

DÉFINITION (COEFFICIENTS D'UNE FONCTION POLYNOMIALE).

i) Soit i un entier naturel. Dans l'écriture

$$a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

on dit que $a_i x^i$ est le *terme* de degré i et que a_i est le *coefficient* de degré i .

ii) Le terme (resp. le coefficient) de degré 0 est appelé le *terme constant* (resp. le *coefficient constant*).

à connaître

Exemple : déterminer les coefficients dans $f(x) = x^3 - 4x + 5$.

On a $f(x) = 1x^3 + 0x^2 + (-4)x + 5$ donc $a_0 = 5$, $a_1 = -4$ (attention à ne pas oublier le signe!), $a_2 = 0$ (les termes ayant un coefficient nul ne sont pas écrits, mais cela ne veut pas dire qu'ils n'existent pas!) et $a_3 = 1$. Et on peut continuer : $a_4 = 0$, $a_5 = 0$, etc., puisqu'on aurait tout aussi bien pu écrire $f(x) = \dots + 0x^5 + 0x^4 + 1x^3 + 0x^2 + (-4)x + 5$.



Remarque. Nous verrons bientôt que lorsque le domaine de définition $\mathcal{D}$ est infini (ce qui pour nous sera toujours le cas), une fonction f ne peut pas avoir deux écritures développées différentes. On peut donc dire « le coefficient de degré i de f » plutôt que « le coefficient de degré i dans une écriture de f ».

DÉFINITION (DEGRÉ D'UNE FONCTION POLYNOMIALE).

Soit f une fonction polynomiale et soient a_0, a_1 , etc. ses coefficients.

i) Le plus grand indice i tel que $a_i \neq 0$ s'appelle le *degré* de f . On le note $\deg(f)$.

ii) Le terme (resp. le coefficient) de degré $\deg(f)$ est appelé le *terme dominant* (resp. le *coefficient*

dominant).



Remarque. Soit f est une fonction polynomiale de degré d et soit a_d son coefficient dominant. On dit parfois que $a_d x^d$ est le « terme de plus haut degré », bien qu'en réalité il y en a d'autres : $a_{d+1}x^{d+1}$, $a_{d+2}x^{d+2}$, etc. ; c'est juste qu'ils sont tous nuls.

② Trois écritures

a) *Cas général*

b) *Cas particulier des fonctions affines*

Rappelons qu'une fonction affine est de la forme $f(x) = mx + p$ avec m le *coefficient directeur* et p l'*ordonnée à l'origine*. Il s'agit donc d'un cas particulier de fonction polynomiale, de degré 0 ou 1, selon que $m = 0$ ou $m \neq 0$ respectivement. Rappelons encore que la courbe représentative d'une fonction affine est une droite non verticale ; elle est horizontale si $m = 0$ et « oblique » si $m \neq 0$.

PROPRIÉTÉ (FORMULE DU COEFFICIENT DIRECTEUR).

Soit $f(x) = mx + p$ une fonction affine et soient x_1 et x_2 deux nombres *distincts*. Le coefficient directeur s'obtient par la formule

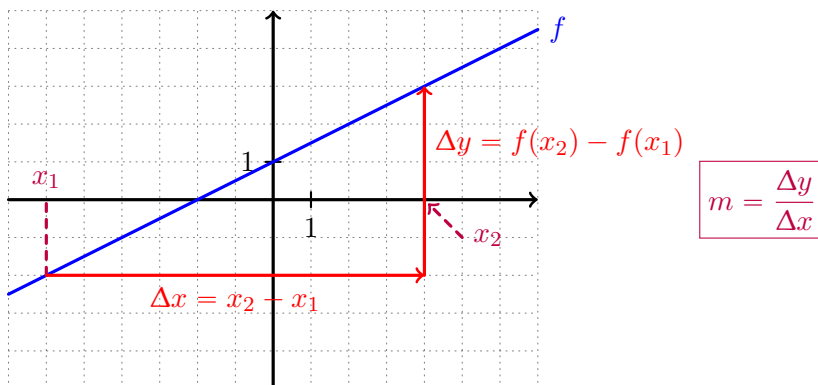
$$m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

(et ensuite on peut obtenir l'ordonnée à l'origine avec $p = f(x_1) - m \times x_1$).

Preuve. On part du membre compliqué et on essaie de le simplifier :

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(mx_2 + p) - (mx_1 + p)}{x_2 - x_1} = \frac{mx_2 + p - mx_1 - p}{x_2 - x_1} = \frac{m \times (x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = m.$$

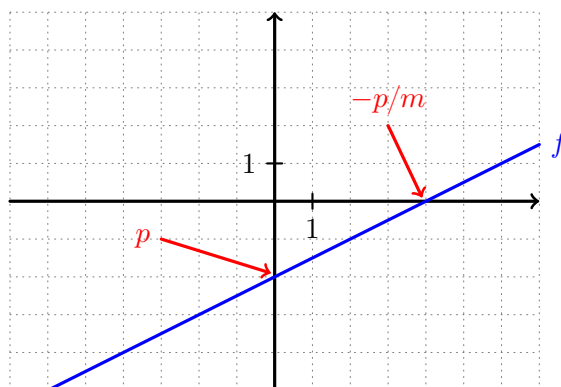
Puis $f(x_1) - mx_1 = (mx_1 + p) - mx_1 = mx_1 + p - mx_1 = p$. **C.Q.F.D.**



L'écriture factorisée existe toujours pour les fonctions affines. Lorsque $m = 0$ on a $f(x) = p$ et l'écriture factorisée se confond avec l'écriture développée. Lorsque $m \neq 0$ on a

$$mx + p = m \times \left(x + \frac{p}{m}\right) = m \times \left(x - \frac{-p}{m}\right)$$

et on voit apparaître l'unique racine $-p/m$ de f . C'est l'abscisse d'intersection de la droite qui représente f et l'axe horizontal (rappelons que lorsque $m \neq 0$, cette droite n'est pas horizontale, elle coupe donc l'axe des abscisses).



L'écriture canonique est $f(x) = m \times (x - \alpha)^1 + \beta = m \times (x - \alpha) + \beta$. Elle existe toujours, et n'est pas unique. En fait, si l'on prend pour $(\alpha; \beta)$ les coordonnées de n'importe quel point par lequel passe la droite qui représente f , on obtient une écriture canonique de f : c'est l'objet de la prochaine

PROPRIÉTÉ (FORME CANONIQUE POUR LES FONCTIONS AFFINES).

Soit $f(x) = mx + p$ une fonction affine. Pour tout point $(\alpha; \beta)$ sur la droite qui représente f , on a

$$f(x) = m \times (x - \alpha) + \beta.$$

Preuve. Puisque $(\alpha; \beta)$ est un point de la courbe représentative, β est l'image de α , c'est-à-dire

$$\beta = f(\alpha) = m\alpha + p.$$

Maintenant vérifions que les deux expressions sont égales :

$$m \times (x - \alpha) + \beta = m \times (x - \alpha) + (m\alpha + p) = mx - m\alpha + m\alpha + p = mx + p = f(x).$$

C.Q.F.D.



Remarque. Lorsqu'on choisit pour α l'abscisse du point d'intersection avec l'axe horizontal, c'est-à-dire $\alpha = -p/m$ et $\beta = 0$, l'écriture canonique se confond avec l'écriture factorisée :

$$f(x) = m \times \left(x - \frac{-p}{m} \right) + 0.$$

③ Théorème du produit nul

④ Tableau de signes

⑤ Exemples de courbes représentatives