PRÉREQUIS

1 Les nombres naïfs (qu'on ne cherche pas à définir précisément)

Définition (entiers naturels).
Les nombres 0, 1, 2, 3, etc., qui servent à décrire le nombre d'objets dans une collection finie, sont les *entiers* naturels. Leur ensemble s'appelle **N**.

Définition (nombres réels).
L'ensemble de tous les nombres qui existent s'appelle **R**. Ses éléments sont les nombres *réels* (par opposition aux nombres *imaginaires*, qui n'existent pas comme par exemple $\sqrt{-1}$, mais qu'on peut rencontrer dans le cours de « mathématiques expertes » en T$^{\text{ale}}$).

Les nombres réels permettent d'exprimer des longueurs, des aires, des volumes, etc., pourvu qu'on se soit donné des *unités*. Voici à quoi ça ressemble : prenons par exemple la masse d'un proton.

$$m_{\text{proton}} = \underbrace{\boxed{1{,}672\,621\,925\,95}}_{\text{mantisse}} \times \overbrace{\boxed{10^{-27}\,\text{kg}}}^{\text{ordre de grandeur}} \underbrace{(\pm 52 \times 10^{-38}\,\text{kg})}_{\text{incertitude}}$$

Comme toujours, la mantisse de l'écriture scientifique est comprise dans l'intervalle $[1\,;10[$ (sinon, cela n'aurait pas de sens de qualifier la puissance de dix qui la suit « d'ordre de grandeur »). De plus on met toujours l'unité dans l'ordre de grandeur, puisque changer d'unité change la valeur. Ainsi, le nombre ci-dessus est aussi

$$m_{\text{proton}} = 1{,}672\,621\,925\,95 \times 10^{-24}\,\text{g}\ \left(\pm 52 \times 10^{-35}\,\text{g}\right)$$

avec 10^{-27} kg et 10^{-24} g qui désignent bien *le même* ordre de grandeur.

⚠ Rappelons que souvent, en physique-chimie, on sous-entend l'incertitude en ajoutant des zéros à droite (qu'on appelle les « zéros significatifs »).

écriture abrégée	écriture rigoureuse	intervalle correspondant
$1{,}25\,\text{mol}/\ell$	$1{,}25\,\text{mol}/\ell\ (\pm 0{,}005\,\text{mol}/\ell)$	$[1{,}245\,\text{mol}/\ell\,;\ 1{,}255\,\text{mol}/\ell]$
$1{,}250\,\text{mol}/\ell$	$1{,}25\,\text{mol}/\ell\ (\pm 0{,}000\,5\,\text{mol}/\ell)$	$[1{,}249\,5\,\text{mol}/\ell\,;\ 1{,}250\,5\,\text{mol}/\ell]$

Ainsi, lorsqu'on exprime le résultat d'une mesure, on donne en fait *un intervalle* (même si pour aller plus vite on écrit seulement un nombre). C'est la raison pour laquelle un professeur de physique-chimie dira que

$$1{,}25\,\text{mol}/\ell \neq 1{,}250\,\text{mol}/\ell,$$

puisque les intervalles correspondant ne sont pas les mêmes.

Remarque. On dit en général que dans un calcul, le résultat doit être écrit avec autant de chiffres significatifs qu'en a la valeur *la moins précise* du calcul ; nous verrons pendant l'année comment calculer rigoureusement l'incertitude du résultat étant données les incertitudes des valeurs intervenant dans le calcul.

2 Opérations

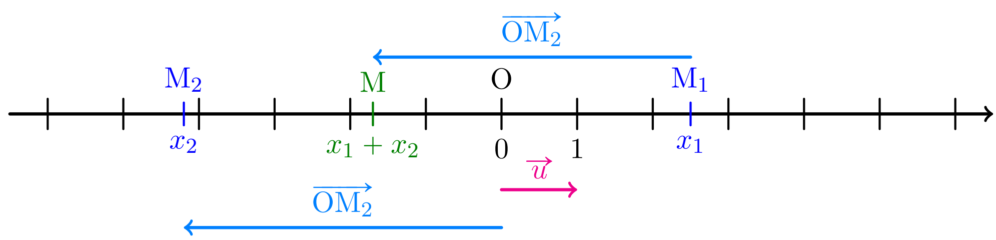
a) *Addition*

On va donner trois définitions de l'addition, selon le type de nombres auxquels on l'applique. On peut démontrer que chaque définition généralise la précédente.

Définition (addition des entiers naturels).
Soient n_1 et n_2 deux entiers naturels. La *somme* de n_1 et n_2 est le nombre d'objets qu'on obtient en réunissant un paquet de n_1 objets et un autre paquet de n_2 objets. Elle se note $n_1 + n_2$.

Définition (addition des réels positifs).
Soient a et b deux réels positifs. La somme de a et b est la longueur du segment obtenu en mettant, bout à bout, un segment de longueur a et un segment de longueur b.

Définition (addition des nombres réels).
Soient x_1 et x_2 deux nombres réels. On se donne une droite graduée $(\mathrm{O}\,;\,\vec{u})$ et on place les points M_1 d'abscisse x_1 et M_2 d'abscisse x_2. La *somme* de x_1 et x_2 est l'abscisse du point M obtenu comme l'image de M_1 par la translation de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}_2}$.



Propriétés (commune évidemment à toutes les définitions) : elle est commutative et associative.

b) *Itération de l'addition*

Définition (multiplication d'un nombre par un entier naturel).
Soit n un entier naturel et soit a un nombre. On note $n \times a$ l'itération de l'addition de a, c'est-à-dire

$$n \times a = \underbrace{a + a + a + \ldots + a}_{n \text{ fois le nombre } a}.$$

c) *Soustraction*

Définition (soustraction).
Soient a et b deux nombres. Le problème $a + \square = b$ possède une unique solution : on l'appelle *différence* de b et a et on la note $b - a$.

Remarque : puisque $a + \square = \square + a$, la différence $b - a$ est *aussi* la solution du problème $\square + a = b$. En revanche, on ne confondra pas

$$a - \square = b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \square = a - b$$

et

$$\square - a = b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \square = a + b$$

qui ne se résolvent pas de la même manière parce que $a - \square$ et $\square - a$ ne sont (en général) pas égaux.

Définition (opposé d'un nombre).
Le nombre $0 - a$ s'appelle l'*opposé* de a. On le note en général plus simplement $-a$.

Remarque. Par définition on a donc

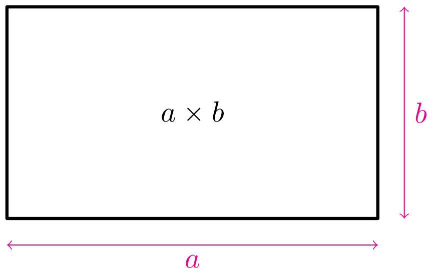
$$a + (-a) = 0 \qquad \text{et} \qquad (-a) + a = 0.$$

Propriété (ajout de l'opposé).
Ajouter à un nombre a l'opposé de b revient à effectuer la soustraction de a par b :

$$a + (-b) = a - b.$$

d) *Multiplication*

Définition (multiplication des nombres positifs).
Soient a et b deux nombres positifs. Le *produit* de a et b est l'aire de n'importe quel rectangle de côtés a et b. On le note $a \times b$.



Remarque. On peut démontrer que cette définition généralise celle qu'on a donnée de $n \times a$ lorsque $n \in \mathbf{N}$ et $a \in \mathbf{R}$ (heureusement !).

PROPRIÉTÉS (DE LA MULTIPLICATION).
Quels que soient les nombres a, b et c on a
i) $a \times 0 = 0 \times a = 0$,
ii) $a \times 1 = 1 \times a = a$,
iii) [commutativité] $a \times b = b \times a$,
iv) [associativité] $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$,
v) [distributivité à gauche] $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$,
vi) [distributivité à droite] $(a + b) \times c = a \times c + b \times c$.

e) *Itération de la multiplication*

DÉFINITION (PUISSANCES).
Soit n un entier naturel et soit a un nombre. On note a^n l'itération de la multplication par a, c'est-à-dire

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ fois le nombre } a}.$$

L'une des tâches des classes de $1^{\text{ière}}$ et T^{ale} est de définir a^x pour $x \in \mathbf{R}$. Et comme dans le cas du passage de $n \times a$ à $x \times a$, il faudra que la nouvelle définition soit compatible avec l'ancienne !

f) *Division*

DÉFINITION (DIVISION).
Soit a un nombre et soit b un nombre différent de zéro. Le problème $a \times \square = b$ possède une unique solution : on l'appelle *quotient* de b par a et on la note $b \div a$.

Remarque : puisque $a \times \square = \square \times a$, le quotient $b \div a$ est *aussi* la solution du problème $\square \times a = b$. En revanche, on ne confondra pas

$$a \div \square = b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \square = a \div b$$

et

$$\square \div a = b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \square = a \times b$$

qui ne se résolvent pas de la même manière parce que $a \div \square$ et $\square \div a$ ne sont (en général) pas égaux.

Définition (inverse d'un nombre).
Le nombre $1 \div a$ s'appelle l'*inverse* de a. On le note en général plus simplement a^{-1}.

Remarques. Puisqu'on ne divise pas par zéro, la définition implique que *l'inverse de zéro n'existe pas*. D'autre part, multiplier un nombre par son inverse donne toujours 1 :

$$a \times a^{-1} = a^{-1} \times a = 1.$$

Propriété (multiplication par l'inverse).
Multiplier un nombre a par l'inverse de b revient à effectuer la division de a par b :

$$a \times b^{-1} = a \div b.$$

Remarque. On comparera toutes ces propriétés avec celles pour la soustraction : c'est exactement la même chose, en remplaçant $-$ par $\div$ et $+$ par $\times$. Par exemple d'un côté on a $a + (-b) = a - b$ et de l'autre on a $a \times b^{-1} = a \div b$.

g) *Priorité des opérations*

D'abord, rappelons leurs noms.

calcul	nom de l'opération	nom du résultat	opérande de gauche	opérande de droite
$a + b$	addition	somme	terme	terme
$a - b$	soustraction	différence	(soustractande)	(soustracteur)
$a \times b$	multiplication	produit	facteur	facteur
$a \div b$	division	quotient	dividende	diviseur
a^b	exponentiation	puissance	base	exposant

Priorité des opérations.
i) Dans un calcul sans parenthèse, on effectue dans cet ordre :
- les exponentiations,
- les multiplications et les divisions,
- les additions et les soustractions.

ii) En cas d'égalité, on effectue les calculs de la gauche vers la droite, sauf les exponentiations qui s'effectuent de la droite vers la gauche.

3 Fractions

4 Équations

Avant toute chose, il faut comprendre que lorsqu'on « transforme » une équation en une autre, on change (en général) l'ensemble de ses solutions. Les « transformations » qu'on utilise sont celles pour lesquelles on comprend comment elles modifient l'ensemble des solutions.

Soit $f_1(x) = g_1(x)$ une équation, dont l'ensemble des solutions est $\mathscr{S}_1$, et soit $f_2(x) = g_2(x)$ l'équation transformée, dont l'ensemble des solutions est $\mathscr{S}_2$. On retiendra

$$f_1(x) = g_1(x) \qquad \Longrightarrow \qquad f_2(x) = g_2(x)\mathscr{S}_1 \subseteq \mathscr{S}_2$$

$$f_1(x) = g_1(x) \qquad \Longleftarrow \qquad f_2(x) = g_2(x)\mathscr{S}_1 \supseteq \mathscr{S}_2$$

$$f_1(x) = g_1(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad f_2(x) = g_2(x)\mathscr{S}_1 = \mathscr{S}_2$$

Voyons un exemple : $3x - 4 = x$ dont l'ensemble des solutions est $\mathscr{S}_1 = \{2\}$ et $0 = 0$ dont l'ensemble des solutions est $\mathscr{S}_2 = \mathbf{R}$. On a

$$3x - 4 = x \qquad \stackrel{\times 0}{\Longrightarrow} \qquad 0 = 0$$

et en effet on a $\mathscr{S}_1 = \{2\} \subseteq \mathscr{S}_2 = \mathbf{R}$.

On fera donc toujours des transformations pour lesquelles les deux équations sont *équivalentes* (on écrit le symbole $\Longleftrightarrow$ entre les deux). Mais nous serons amenés, pendant l'année, à rencontrer des situations où l'on doit se contenter d'un $\Longrightarrow$.

Remarque. Dans le cours de probabilités, nous reviendrons sur le lien entre « implication logique » et « inclusion » : dire que l'événement A *implique* l'événement B (ou que l'événement B est une conséquence de l'événement A) revient à dire que $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}$.

On ne change pas l'ensemble des solutions d'une équation en ajoutant ou en retranchant une même quantité à chacun de ses membres.

Preuve. Prenons l'équation $f(x) = g(x)$ et le nombre k. Il est clair qu'on a aussi $f(x) + k = g(x) + k$, c'est-à-dire

$$f(x) = g(x) \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) + k = g(x) + k.$$

Mais la règle est plus précise : elle dit qu'on a aussi l'implication réciproque

$$f(x) = g(x) \qquad \Longleftarrow \qquad f(x) + k = g(x) + k,$$

autrement dit qu'on peut revenir en arrière. Montrons que c'est bien le cas : l'opération « ajouter k à chaque membre » est réversible (l'opération réciproque étant « soustraire k à chaque membre ») donc

$$f(x) + k = g(x) + k \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) + k - k = g(x) + k - k$$

et cette dernière équation est évidemment celle de départ $f(x) = g(x)$. **C.Q.F.D.**

On ne change pas l'ensemble des solutions d'une équation en multipliant ou en divisant par une même quantité *non nulle* chacun de ses membres.

Preuve. C'est exactement la même, et on voit à quel endroit on a besoin de l'hypothèse $k \neq 0$: la multiplication par zéro *n'est pas réversible* (puisqu'on ne peut pas diviser par zéro). **C.Q.F.D.**

5 Les autres ensembles de nombres

a) *Les entiers relatifs*

L'ensemble de toutes les différences $a - b$ avec $a, b \in \mathbf{N}$ s'appelle $\mathbf{Z}$. Ses éléments sont les *entiers relatifs*.

Remarque. L'écriture sous forme de différence n'est pas unique : même si $(a, b) \neq (a', b')$, les deux différences $a - b$ et $a' - b'$ peuvent donner le même résultat.

Propriété.
Soient a, b, a', b' quatre entiers naturels. Alors

$$a - b = a' - b' \qquad \Longleftrightarrow \qquad a + b' = a' + b.$$

La même propriété reste vraie lorsque a, b, a' et b' sont des réels quelconques.

b) *Les nombres rationnels*

L'ensemble de tous les quotients a/b avec $a \in \mathbf{Z}$ et $b \in \mathbf{Z} - \{0\}$ s'appelle $\mathbf{Q}$. Ses éléments sont les *nombres rationnels*.

Remarque. L'écriture sous forme fractionnaire n'est pas unique : même si $(a, b) \neq (a', b')$, les deux quotients a/b et a'/b' peuvent donner le même résultat.

Propriété (« produits en croix »).
Soient a, b, a', b' quatre entiers relatifs, avec b et b' différents de zéro. Alors

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \qquad \Longleftrightarrow \qquad a \times b' = a' \times b.$$

La même propriété reste vraie lorsque a, b, a' et b' sont des réels quelconques (avec toujours la restriction b et b' différents de zéro).

Remarque. On comparera cette propriété avec celle pour les différences : c'est exactement la même chose, en remplaçant $-$ par $\div$ et $+$ par $\times$. D'un côté on a $a - b = a' - b'$ (resp. $a/b = a'/b'$) et de l'autre on a $a + b' = a' + b$ (resp. $a \times b' = a' \times b$).

Propriété (caractérisation des nombres rationnels).
Un nombre est rationnel si et seulement si il a un développement décimal périodique à partir d'un certain rang.

Voyons la méthode correspondant à l'implication réciproque ($\Leftarrow$). Prenons par exemple $x = 2{,}514\,144\,144\,144\ldots$. On sépare le début $\tilde{x} = 2{,}51$ et la partie périodique $p = 0{,}414\,414\,414\ldots$ (de sorte que $x = \tilde{x} + p \times 10^{-2}$). Il est clair que $\tilde{x} = 251/100$, et pour la partie périodique on remarque que

$$1\,000 \times p - 414 = 414{,}414\,414\,414\ldots - 414 = 0{,}414\,414\,414\ldots = p,$$

et donc en résolvant l'équation on trouve

$$1\,000 \times p - 414 = p \qquad \Longleftrightarrow \qquad 999 \times p - 414 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 999 \times p = 414 \qquad \Longleftrightarrow \qquad p = \frac{414}{999}.$$

Finalement

$$x = \tilde{x} + p \times 10^{-2} = \frac{251}{100} + \frac{414}{999} \times \frac{1}{100} = \frac{27907}{11100}$$

est bien un nombre rationnel.

On retiendra les cas où la période commence immédiatement après la virgule, qui sont des fractions dont le dénominateur (avant simplification éventuelle) n'a que des 9 :

$$0{,}444\,44\underline{4}\ldots = \frac{4}{9}$$

$$0{,}313\,1\underline{31}\ldots = \frac{31}{99}$$

$$0{,}005\,005\,\underline{005}\ldots = \frac{5}{999}$$

$$0{,}121\,812\,18\underline{1\,218}\ldots = \frac{1\,218}{9\,999} \left(= \frac{406}{3\,333} \right)$$

c) *Les nombres décimaux*

Reprenons le raisonnement précédent avec $\xi = 0{,}999\,99\underline{9}\ldots$. On a $10 \times \xi - 9 = \xi$, donc en résolvant l'équation on trouve

$$10 \times \xi - 9 = \xi \quad \Longleftrightarrow \quad 9 \times \xi - 9 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 9\xi = 9 \quad \Longleftrightarrow \quad \xi = 1.$$

Et la même simplification se produit avec n'importe quel nombre dont le développement décimal se termine par une infinité de 9 : par exemple $x = 2{,}499\,999\,99\underline{9}\ldots$. On a

$$x = 2{,}4 + \xi \times 10^{-1} = 2{,}4 + 1 \times 10^{-1} = 2{,}4 + 0{,}1 = 2{,}5.$$

L'ensemble de tous les quotients $a/10^n$ avec $a \in \mathbf{Z}$ et $n \in \mathbf{N}$ s'appelle $\mathbf{D}$. Ses éléments sont les *nombres décimaux*.

Un nombre est décimal si et seulement s'il admet un développement décimal *fini*.

Remarque. Les nombres décimaux sont donc en réalité les empêcheurs de tourner en rond dans cette affaire : ils ont deux développements décimaux (l'une avec un nombre fini de chiffres après la virgule, l'autre se terminant avec une infinité de 9). Tous les autres nombres (donc les éléments de $\mathbf{R} - \mathbf{D}$) ont *un seul* développement décimal.

d) *Inclusions*

Propriété.
On a $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{D} \subseteq \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{R}$.

Remarque. Toutes ces inclusions sont en fait *strictes* : -1 appartient à $\mathbf{Z}$ mais pas à $\mathbf{N}$, $1/2 = 0{,}5$ appartient à $\mathbf{D}$ mais pas à $\mathbf{Z}$, $1/3 \simeq 0{,}333\,333\,33\underline{3}\ldots$ appartient à $\mathbf{Q}$ mais pas à $\mathbf{D}$, et $\sqrt{2}$ appartient à $\mathbf{R}$ mais pas à $\mathbf{Q}$.