T^{ALE} STL — *Exercices de mathématiques*

SUITES NUMÉRIQUES (1)

§1. Suites arithmétiques

1 Pour chacune des suites arithmétiques ci-dessous, trouver la valeur de u_{10}, puis celle de u_{100} :

a) $u_0 = 1, 3, 5, 7, 9, 11, \ldots$
b) $u_0 = 0, 4, 8, 12, 16, 20, \ldots$
c) $u_0 = 3, 7, 11, 15, 19, 23, \ldots$
d) $u_0 = 10, 25, 40, 55, 70, 85, \ldots$
e) $u_0 = 5, 3, 1, -1, -3, -5, \ldots$
f) $u_0 = 7, 15, 23, 31, 39, 47, \ldots$

2

a) Représenter graphiquement (sur papier) la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = -3$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + 4$. On fera apparaître les dix premiers termes.

b) Que peut-on dire des points obtenus ?

c) Quel est le coefficient directeur de la droite qu'on voit apparaître ?

3 Pour chacune des suites arithmétiques ci-dessous, trouver la valeur de u_0 à partir des informations proposées (p est la raison) :

a) $u_{10} = 100$ et $p = 5$,
b) $u_{100} = 10$ et $p = 5$,
c) $u_{100} = 10$ et $p = 1/5$,
d) $u_{10} = 5$ et $p = 10$,
e) $u_{100} = 5$ et $p = 1/100$,
f) $u_{10} = 10$ et $p = 1/10$.

4 Pour chacune des suites arithmétiques ci-dessous, trouver la raison p à partir des informations proposées :

a) $u_0 = 4$ et $u_{10} = 14$,
b) $u_1 = 5$ et $u_5 = 1$,
c) $u_3 = 3$ et $u_{13} = 26$,
d) $u_5 = 0$ et $u_{95} = 10$,
e) $u_{10} = 15$ et $u_{30} = 25$,
f) $u_0 = 4$ et $u_9 = 28$.

5 Une suite arithmétique $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie les hypothèses suivantes :

$$u_0 + u_1 = 4 \quad \text{et} \quad u_2 + u_3 = 10.$$

a) On note p la raison de cette suite. Que vaut $u_2 - u_0$? Et $u_3 - u_1$?

b) En déduire que $4 \times p = 6$. Quelle est la valeur de p ?

c) Justifier que $2 \times u_0 = 2{,}5$. Que vaut u_0 ?

d) Donner les dix premiers termes de cette suite.

6 Une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $u_0 = 5$, $u_{40} = 35$ et $u_{100} = 50$. Peut-elle être arithmétique ? Justifier la réponse.

7 Déterminer si le nombre 1000 est un terme des suites arithmétiques suivantes (le nombre p est la raison) :

a) $u_0 = 0$ et $p = 4$,
b) $u_0 = 1$ et $p = 3$,
c) $u_0 = 2$ et $p = 7$,
d) $u_0 = 3$ et $p = 15$,
e) $u_0 = 4$ et $p = 17$,
f) $u_0 = 5$ et $p = 35$.

8 Existe-t-il une suite arithmétique qui, parmi ses dix premiers termes (de u_0 à u_9), prend les valeurs 1, 4 et 17 ?

9 À l'aide de programmes Python, calculer les sommes suivantes :

a) $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 100$,
b) $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 1000$,
c) $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \ldots + 99$,
d) $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \ldots + 999$,
e) $1 + 4 + 7 + 10 + 13 + 16 + \ldots + 898$,
f) $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + \ldots + 1000$.

10 Retrouver par le calcul les valeurs des sommes de l'exercice précédent.

11 Une suite arithmétique commence par le terme $u_0 = 1/2$ et a pour raison $p = 1/3$. Cette suite contient-elle des nombres entiers ? Justifier la réponse.

12 Reprendre l'exercice précédent avec $u_0 = 2/3$ et $p = 7/6$.

§2. Suites géométriques

13 Est-ce qu'une suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ peut être à la fois arithmétique et géométrique ? Justifier la réponse.

14 Pour chacune des suites géométriques ci-dessous, trouver la raison q à partir des informations proposées :
a) $u_0 = 4$ et $u_2 = 1$,
b) $u_1 = 25$ et $u_3 = 5$,
c) $u_0 = 32$ et $u_4 = 4\,096$,
d) $u_0 = 1$ et $u_3 = 64$,
e) $u_3 = 15$ et $u_5 = 30$,
f) $u_1 = 3$ et $u_6 = 59\,049$.

15 Une suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est telle que

$$u_{n+2} - u_n = 1$$

pour tout indice n.

a) Donner un exemple de suite arithmétique qui vérifie cette hypothèse.

b) Donner un exemple de suite « pas arithmétique » qui vérifie cette hypothèse.

c) Démontrer qu'une telle suite ne peut pas être géométrique.

16 On considère une suite géométrique $(u_n)_{n \geqslant 0}$ de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q > 1$.

a) Écrire un programme Python `Seuil(q)` qui détermine le plus petit indice n tel que $u_n \geqslant 1\,000$.

b) Qu'obtient-on pour $q = 2$? Et pour $q = 3$?

c) Reprendre les questions précédentes en remplaçant $1\,000$ par $1\,000\,000$ puis par $1\,000\,000\,000$. Que remarque-t-on ?

17 Calculer la somme

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{1024}.$$

18 Exprimer en fonction de n la somme

$$S(n) = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots + \frac{1}{3^n}.$$

Quelle est la limite de $S(n)$ lorsque $n \to \infty$?

19 En musique, une *octave* est l'intervalle entre deux notes dont les fréquences fondamentales f et f' vérifient $f'/f = 2$ (autrement dit, f' est la première harmonique de f). Une *quinte* est l'intervalle entre deux notes dont les fréquences fondamentales f et f' vérifient $f'/f = 3/2$.

a) Justifier l'affirmation suivante : « si f'' est la deuxième harmonique de f, il y a entre f et f'' un intervalle égal à une octave plus une quite. »

b) On note f_{do} la fréquence du do le plus grave d'un piano. Exprimer en fonction de f_{do} la fréquence du do le plus aigu, situé sept octaves plus haut.

c) Si, toujours à partir du do le plus grave, on parcourt douze quintes, sur quelle note arrive-t-on ? Quelle devrait être sa fréquence ?

d) Commenter.

20 Toujours en musique, le *tempérament égal* consiste à accorder un instrument à clavier de sorte que l'intervalle entre deux touches consécutives soit toujours le même : si f et f' sont les fréquences des deux touches, le rapport $q = f'/f$ est constant.

a) Que vaut q^{12} ? On pourra s'aider de la photo d'un clavier pour répondre.

b) En déduire la valeur de q.

c) Si la fréquence fondamentale du cinquième la d'un piano est 440 Hz, quelle est celle du la le plus grave ?

d) Calculer la fréquence fondamentale du do médian d'un piano (c'est celui qui est juste avant le la à 440 Hz).

21 On place sur un compte bloqué la somme de 1 000 euros. Les intérêts sont versés tous les mois, le taux annuel étant de 3 %.

a) Quelle somme se trouvera sur le compte au bout d'un an ?

b) Au bout de combien de mois la somme aura-t-elle doublé ? On pourra s'aider d'un programme pour répondre.

c) À la fin de la première année, on retire 500 euros. Au bout de combien de mois aura-t-on reconstitué les 1 000 euros initiaux ? Justifier la réponse.