

FONCTIONS, LIMITES

§1. Fonctions polynomiales

1 📏 Résoudre les équations suivantes :

- a) $x + 3 = 2x + 1$, b) $3x + 3 = 2x - 5$,
 c) $x + 6 = 2x - 6$, d) $4x - 3 = 3x - 1$,
 e) $1 - 4x = -3x + 3$, f) $4x - 5 = 2x - 1$.

2 📏 Même consigne :

- a) $7x - 2 = 3x + 4$, b) $3x + 3 = 2x - 3$,
 c) $6x + 6 = 2x - 1$, d) $12x - 8 = 7x + 2$,
 e) $1 - 3x = 3x - 5$, f) $3x + 7 = 5x - 5$.

3 📏 Même consigne :

- a) $\frac{x+4}{4} = 3x - 1$, b) $3x + 3 = \frac{x+5}{2}$,
 c) $\frac{1-x}{5} = 2x - 6$, d) $4x - 1 = \frac{2x+3}{3}$,
 e) $\frac{2x+5}{3} = 2x + 3$, f) $3x - 1 = \frac{5x+2}{7}$.

4 📏 Développer avec les identités remarquables :

- a) $(x+1)^2$, b) $(x-4)^2$, c) $(x+3)^2$,
 d) $(x-5)^2$, e) $(2x-2)^2$, f) $(2x+3)^2$,
 g) $(2x-4)^2$, h) $(3x-6)^2$, i) $(3x-2y)^2$.

5 📏 Développer et réduire :

- a) $(x+1) \times (x-3)$, b) $(x+3) \times (x-1)$,
 c) $(x-2) \times (3-2x)$, d) $(1+3x) \times (2x+1)$,
 e) $(3x-1) \times (3x+2)$, f) $(2x+4) \times (x^2+3)$.

6 📏 Même consigne :

- a) $(2x+1) \times (2x-3)$, b) $(2x+5) \times (3x-2)$,
 c) $(5x-2) \times (3x+2)$, d) $(6x+9) \times (2x+9)$,
 e) $(1-4x) \times (3-4x)$, f) $(2x^2+1) \times (x^2-4)$.

7 📏 Développer et réduire

$$(x+1) \times (x+2) \times (x+3).$$

8 📏 Résoudre les équations suivantes :

- a) $(2x+1)(x-3) = 0$,
 b) $(x-1)(2x-3) = 0$,
 c) $(2x+1)(4-3x) = 0$,
 d) $(10x-1)(2x+5) = 0$,
 e) $(1-4x)(4x+3) = 0$,
 f) $(2x-1)(4x-2) = 0$.

9 📏 Dresser les tableaux de signes des fonctions suivantes :

- a) $f_1(x) = (2x+5)(3x-4)$,
 b) $f_2(x) = (x-1)(4-x)$,
 c) $f_3(x) = (2x+1)(2x-1)$,
 d) $f_4(x) = (x-1)(2x+1)(3x+1)$,
 e) $f_5(x) = (x+1)(3-2x)(x+4)$,
 f) $f_6(x) = (2-3x)(2-x)(3-4x)$.

10 📏 Résoudre les inéquations suivantes :

- a) $2x + 3 \geq 1$, b) $18x + 10 \geq 0$,
 c) $15x - 20 \leq 3$, d) $5x - 3 \leq 9$,
 e) $3 - 5x < 3$, f) $4x - 5 > 2$.

11 📏 Même consigne :

- a) $x + 1 \geq 2x + 2$, b) $3x + 1 \geq 2x + 2$,
 c) $2x + 1 \leq 3x - 1$, d) $3x - 2 \leq 4x - 4$,
 e) $2 - 4x < 3x - 5$, f) $4x - 4 > 5x - 5$.

12 📏 Résoudre l'inéquation

$$(x+3)(x-2) \leq (x+9)(x-7).$$

13 📏 Résoudre l'inéquation

$$(2x+1)(x-3) < (x+5)(2x+4).$$

§2. Fractions rationnelles

14 Dresser le tableau des variations de la fonction inv : $x \mapsto 1/x$, en y faisant apparaître ses limites.

15 Mettre les quantités suivantes sous la forme d'une fraction irréductible :

- a) $\frac{1}{3} + \frac{1}{2}$, b) $\frac{1}{2} + 1$, c) $2 + \frac{1}{3}$,
d) $\frac{1}{5} + 2$, e) $1 - \frac{2}{3}$, f) $\frac{3}{2} + \frac{2}{3}$,
g) $\frac{3}{2} + \frac{3}{4}$, h) $\frac{3}{2} - \frac{4}{3}$, i) $\frac{1}{4} + \frac{5}{12}$.

16 Mettre les expressions suivantes sous la forme d'une seule fraction :

- a) $x + \frac{1}{2}$, b) $\frac{x}{2} + 1$, c) $2 + \frac{x}{4}$,
d) $\frac{1}{2} + x$, e) $3 - \frac{x}{3}$, f) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3}$,
g) $\frac{x}{2} + \frac{x}{4}$, h) $\frac{1}{2} + \frac{x}{5}$, i) $\frac{2x}{3} + \frac{3}{4}$.

17 Résoudre les équations suivantes :

- a) $\frac{x+2}{2x-3} = 4$, b) $\frac{3x-4}{2-3x} = 1$,
c) $\frac{x-2}{3x+3} = 2$, d) $\frac{3x-7}{7x-9} = -3$,
e) $\frac{5x+8}{4-5x} = 5$, f) $\frac{3-x}{1-2x} = -2$.

18 Résoudre les inéquations suivantes :

- a) $\frac{x+1}{2x-3} \geq 0$, b) $\frac{2x+4}{1-3x} > 0$,
c) $\frac{x+2}{2x+3} < 0$, d) $\frac{3x+4}{7x+9} \leq 0$,
e) $\frac{5x-1}{2x+1} \geq 0$, f) $\frac{2x+2}{1-x} > 0$.

19 Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{2x+5}{x-3}.$$

- a) Déterminer son domaine de définition \mathcal{D}_f .
b) Pour $x \in \mathcal{D}_f$, montrer que

$$f(x) - 1 = \frac{x+8}{x-3}.$$

- c) Résoudre l'inéquation $f(x) \leq 1$.

20 Soit g la fonction définie par

$$g(x) = \frac{x+2}{2x-4}.$$

- a) Déterminer son domaine de définition \mathcal{D}_g .

- b) Pour $x \in \mathcal{D}_g$, montrer que

$$g(x) + 3 = \frac{7x-10}{2x-4}.$$

- c) Résoudre l'inéquation $g(x) \geq -3$.

§3. Limites

21 Calculer les limites suivantes :

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 3x$, b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 3x$,
c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 + 2x$, d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - 2x$,
e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + x + 1$, f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - x - 1$.

22 Dresser le tableau de signes de

$$f(x) = \frac{x-3}{2x+1}$$

puis en déduire $\lim_{x \rightarrow (-1/2)^+} f(x)$.

23 Dresser le tableau de signes de

$$f(x) = \frac{2x+3}{x-2}$$

puis en déduire $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$.

24 Dresser le tableau de signes de

$$f(x) = \frac{2x+1}{3-x}$$

puis en déduire $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$.

25 Dresser le tableau de signes de

$$f(x) = \frac{(x-3)(4-3x)}{x+2}$$

puis en déduire $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x)$.