FONCTIONS EXPONENTIELLES (1)

§1. Taux d'évolution

1 Calculer les valeurs obtenues après les augmentations (ou réductions) suivantes :

a) 100 (+45 %), **b)** 70 (+35 %),
c) 85 (+15 %), **d)** 200 (−5 %),
e) 20 (−30 %), **f)** 110 (−110 %).

2

a) On applique successivement une augmentation de 20 %, puis une diminution de 20 %, à la somme de 100 euros. Quelle valeur obtient-on ?

b) Plus généralement, calculer le taux d'évolution global correspondant à deux évolutions successives, la première du taux t, la deuxième du taux $-t$. On suppose que $t > 0$.

c) Justifier que pour n'importe quel taux strictement positif t, une augmentation du taux t suivie d'une diminution du taux t revient toujours à une diminution globale.

3 Calculer le taux d'évolution global lorsqu'on effectue successivement les évolutions proposées :

a) (+20 %) puis (+25 %),
b) (+10 %) puis (+20 %) puis (+30 %),
c) (+20 %) puis (−25 %),
d) (−20 %) puis (+25 %),
e) (+75 %) puis (+75 %) puis (−50 %),
f) (+8 %) puis (−8 %) puis (+8 %) puis (−8 %).

4

a) Une valeur subit deux augmentations successives de 50 %, puis une diminution de 50 %. La valeur finale est-elle égale, inférieure, ou supérieure à la valeur de départ ? Justifier la réponse.

b) Existe-t-il un taux $t > 0$ tel que deux augmentations successives du taux t, suivies d'une diminution du taux t, redonne *exactement* la valeur de départ ?

§2. Racines n-ièmes

5 Sur un même graphique (sur papier), construire les courbes des fonctions $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ et $x \mapsto \sqrt[4]{x}$. On se placera sur l'intervalle $[0\,;\,10]$.

6 Quel est le diamètre, en centimètres, d'une boule de volume 1 L ?

7 Simplifier :

a) $\sqrt[3]{18} \times \sqrt[3]{12}$, **b)** $\sqrt[3]{25} \times \sqrt[3]{15}$,
c) $\sqrt[3]{50} \times \sqrt[3]{20}$, **d)** $\sqrt[3]{100} \times \sqrt[3]{54}$,
e) $\sqrt[3]{10} \times \sqrt[3]{100}$, **f)** $\sqrt[3]{20} \times \sqrt[3]{400}$.

8 Simplifier :

$$(\sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{a}) \times (\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}).$$

9

a) Démontrer que pour quels que soient les nombres A et B (positifs ou négatifs), on a toujours

$$\mathrm{A}^2 + \mathrm{AB} + \mathrm{B}^2 \geqslant 0.$$

Indice : regarder les quantités $\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2$ et $(\mathrm{A} + \mathrm{B})^2$.

b) En déduire que

$$\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2} \geqslant 0$$

pour tous $a, b \in \mathbf{R}$.

c) En utilisant le résultat de l'exercice précédent, démontrer que la fonction $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ est croissante, c'est-à-dire que pour tous $a, b \in \mathbf{R}$, les nombres $\sqrt[3]{a}$ et $\sqrt[3]{b}$ sont dans le même ordre que a et b.

§3. Retour sur les suites géométriques

10 On augmente dix fois de suite 100 euros de 10 %. Quelle valeur obtient-on ?

11

a) Une certaine valeur x est augmentée dix fois de suite de 10 %. Quelle est la valeur y obtenue ?

b) Si l'on souhaite passer de x à y en non pas 10 mais 20 augmentations successives, quel taux t faut-il appliquer à chaque fois ?

c) Le résultat de la question précédente dépend-t-il de la valeur de départ x ?

12 La somme de 500 euros, placée sur un livret, est augmentée chaque année d'un même taux t. Au bout de cinq ans, la valeur atteinte est de 600 euros.

a) Quelle somme y a-t-il sur le livret au bout de dix ans ? On suppose évidemment qu'aucun retrait ou virement n'est effectué.

b) Quelle somme y a-t-il sur le livret au bout de sept ans ? Justifier la réponse.

13 On part de $u_0 = 1$. À chaque étape, on multiplie le nombre u_n qu'on a par trois, et on lui ajoute un : on obtient le nombre suivant u_{n+1}.

a) Écrire la formule qui relie u_{n+1} à u_n.

b) Soit $(v_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $v_n = u_n + 1/2$. Démontrer qu'elle est géométrique. Quelle est sa raison q ?

c) On rappelle que le terme général d'une suite géométrique est donné par la formule $v_n = v_0 \times q^n$. Calculer v_{10}, puis u_{10}.

14 Qui est le plus grand entre

$$a = 222^{333} \quad \text{et} \quad b = 333^{222} \ ?$$

15 Le nombre $3^5 = 243$ a trois chiffres. Le nombre $3^{10} = 59\,049$ a cinq chiffres. Quelle est la plus petite puissance de 3 qui a dix chiffres ?

16 Cet exercice est à faire *sans* calculatrice. On considère la suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $q = \sqrt[5]{3}$.

a) Calculer u_5 et u_{10}.

b) Que vaut u_{22}/u_7 ?

c) Calculer $\sqrt[4]{81}$.

d) Trouver un indice n tel que $u_n = 182$.

17 On considère deux suites géométriques $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$. On connaît les premiers termes $u_0 = 5$ et $v_0 = 2$. On sait aussi que $u_3 = v_3$. Calculer v_{10}/u_{10}.

18 Une suite géométrique vérifie $u_{10} = 15$ et $u_{20} = 30$. Calculer u_0 et u_1.

19 Une suite géométrique, à termes strictement positifs, vérifie $u_0 + u_1 = 3/2$ et $u_0 + u_2 = 4/3$.

a) Cette suite est-elle croissante ou décroissante ? Justifier la réponse.

b) Vérifier que les deux solutions de l'équation $9q^2 - 8q + 1 = 0$ sont $\dfrac{4-\sqrt{7}}{9}$ et $\dfrac{4+\sqrt{7}}{9}$.

c) Sachant que le premier terme u_0 est strictement plus grand que 1, déterminer la raison de cette suite.

d) Calculer u_{10}.

§4. Moyennes arithmétiques et géométriques

20 On considère des nombres réels $x_1, x_2, \ldots, x_{\mathrm{N}}$, et on suppose qu'on les a rangés dans l'ordre croissant (donc x_1 est le plus petit, et x_{N} le plus grand). On calcule leur moyenne arithmétique m. Démontrer que $x_1 \leqslant m \leqslant x_{\mathrm{N}}$.

21 On considère des nombres réels positifs $x_1, x_2, \ldots, x_{\mathrm{N}}$, et on suppose qu'on les a rangés dans l'ordre croissant (donc x_1 est le plus petit, et x_{N} le plus grand). On calcule leur moyenne géométrique g. Démontrer que $x_1 \leqslant g \leqslant x_{\mathrm{N}}$.

22 Soient a et b deux nombres réels positifs. Entre $m = \dfrac{a+b}{2}$ et $g = \sqrt{a \times b}$, qui est le plus grand ? Justifier la réponse.

23 On considère les nombres $x_1 = 10$, $x_2 = 20$, $x_3 = 30$ et $x_4 = 40$.

a) Calculer leur moyenne arithmétique.

b) Quel nombre x_5 doit-on ajouter pour que la moyenne arithmétique dépasse 50 ? Justifier.

c) Reprendre les deux questions avec la moyenne géométrique.

24

a) Quelle est la plus petite valeur de n pour laquelle la moyenne arithmétique de $1, 2, 3, 4, \ldots, n$ dépasse 10 ?

b) Même question pour la moyenne géométrique.