TALE STL — *Exercices de mathématiques*

DÉRIVÉES, LIMITES

§1. Fonctions du troisième degré

1 Rappeler les formules pour la dérivée de $x \mapsto x^p$, lorsque $p = 0$, $p = 1$, $p = 2$ et $p = 3$. Quelle est la formule pour p quelconque ?

2 Tracer (sur papier) les courbes représentatives des fonctions suivantes :

a) $f_1(x) = x^3$,

b) $f_2(x) = x^3 - 3x$,

c) $f_3(x) = x^3 - 3x + 1$,

d) $f_4(x) = x^3 - x^2 + x - 1$,

e) $f_5(x) = x^3 - 5x + 3$,

f) $f_6(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$.

3 Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

a) $f_1(x) = \dfrac{x^3+1}{2}$,

b) $f_2(x) = \dfrac{1}{6}x^3 + x^2 - x - 4$,

c) $f_3(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{4}$,

d) $f_4(x) = x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 + x - \dfrac{1}{5}$,

e) $f_5(x) = \dfrac{1}{8}x^3 - x^2 + \dfrac{1}{4}x - 1$,

f) $f_6(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 + 3x - 4}{12}$.

4 Soit $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 1$.

a) Calculer $f'(x)$.

b) Développer $(3x + 4) \times (x - 2)$.

c) En déduire le tableau de signes de $f'(x)$, puis le tableau des variations de f.

d) Quels sont les nombres k pour lesquels l'équation $f(x) = k$ possède trois solutions ? Justifier la réponse.

5 Soit $g(x) = x^3 - 2x^2 + x + 2$.

a) Calculer $g'(x)$.

b) Développer $(3x - 1) \times (x - 1)$.

c) En déduire le tableau de signes de $g'(x)$, puis le tableau des variations de g.

d) Quels sont les nombres k pour lesquels l'équation $g(x) = k$ possède trois solutions ? Justifier la réponse.

6 Soient p et q deux nombres. On considère la fonction f définie par $f(x) = x^3 + px + q$.

a) Calculer $f'(x)$.

b) Justifier que si $p \geqslant 0$, alors f est strictement croissante.

c) On suppose que $p < 0$. Dresser le tableau de signes de f', puis le tableau des variations de f. On utilisera la troisième identité remarquable pour factoriser f'.

7 Soit $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

a) Simplifier au maximum $f\left(t - \dfrac{b}{3a}\right)$.

b) En regardant l'exercice précédent, expliquer l'intérêt du calcul ci-dessus.

§2. Quotients

Rappel. Si $u, v : \mathrm{I} \to \mathbf{R}$ sont deux fonctions dérivables, et si v ne s'annule pas sur I, alors la fonction u/v est elle-même dérivable et sa dérivée est donnée par la formule

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}.$$

8 Que devient la formule ci-dessus dans le cas particulier où v est la fonction constante égale à 1 ?

9 Après avoir fait l'exercice précédent, calculer les dérivées des fonctions suivantes :

a) $f_1(x) = \dfrac{1}{x}$, **b)** $f_2(x) = \dfrac{1}{x^2}$,

c) $f_3(x) = \dfrac{1}{x^3}$, **d)** $f_4(x) = -\dfrac{1}{x^2}$,

e) $f_5(x) = \dfrac{2}{x^3}$, **f)** $f_6(x) = -\dfrac{6}{x^4}$.

10 Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

a) $f_1(x) = \dfrac{x}{x+1}$, **b)** $f_2(x) = \dfrac{2x}{2x+1}$,

c) $f_3(x) = \dfrac{2x-1}{2x+1}$, **d)** $f_4(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$,

e) $f_5(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$, **f)** $f_6(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

11 Même exercice (les nombres a, b, c, d et k sont des paramètres fixés) :

a) $f_1(x) = \dfrac{x^2-1}{x+1}$, **b)** $f_2(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$,

c) $f_3(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, **d)** $f_4(x) = \dfrac{x-k}{x+k}$,

e) $f_5(x) = \dfrac{x^2-k}{x^2+k}$, **f)** $f_6(x) = \dfrac{1}{x^2-k^2}$.

§3. Racines carrées

Rappel. Si $u : \mathrm{I} \to \mathbf{R}$ est une fonction dérivable, et si u est strictement positive sur I, alors la fonction $\sqrt{u}$ est elle-même dérivable et sa dérivée est donnée par la formule

$$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2 \times \sqrt{u}}.$$

12 Que devient la formule ci-dessus dans le cas particulier où $u(x) = x$?

13

a) Tracer proprement (sur papier) la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$. On se placera sur $[0\,;2]$.

b) Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.

c) Que vaut $\displaystyle\lim_{h \to 0^+} \frac{\sqrt{h} - \sqrt{0}}{h-0}$?

d) La fonction racine carrée est-elle dérivable en zéro ? Y a-t-il une tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 ? Justifier les réponses.

14 Rappeler la formule pour la dérivée de $f(x) = x^p$. Qu'obtient-on pour $p = 1/2$? Faire le lien avec la dérivée de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$.

Rappel. Si $u, v : \mathrm{I} \to \mathbf{R}$ sont deux fonctions dérivables, alors la fonction $u \times v$ est elle-même dérivable et sa dérivée est donnée par la formule

$$(u \times v)' = u' \times v + u \times v'.$$

15 Rappeler (encore une fois !) la formule pour la dérivée de $f(x) = x^p$. Qu'obtient-on pour $p = 3/2$? Faire le lien avec la dérivée de la fonction $x \mapsto x \times \sqrt{x}$ (qu'on commencera par calculer, avec la formule pour la dérivée d'un produit).

16 Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

a) $f_1(x) = (x+1) \times \sqrt{x}$,

b) $f_2(x) = (2x-1) \times \sqrt{x}$,

c) $f_3(x) = x \times \sqrt{x+1}$,

d) $f_4(x) = x \times \sqrt{2x-1}$,

e) $f_5(x) = (x+1) \times \sqrt{x-1}$,

f) $f_6(x) = (x-1) \times \sqrt{x+1}$.

17 Soit $f(x) = x - \sqrt{x}$.

a) Déterminer le domaine de définition de f.

b) Démontrer que $f'(x) = \dfrac{2\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}}$.

c) Résoudre l'inéquation $2\sqrt{x} - 1 \geqslant 0$.

d) En déduire le tableau de signes de $f'(x)$, puis le tableau des variations de f.

e) Quelle est la valeur minimale prise par $f(x)$?

f) Calculer la limite de $f(x)$ lorsque $x \to +\infty$. Placer cette limite dans le tableau de variations.

18 Soit $f(x) = x - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

a) Déterminer le domaine de définition de f.

b) Démontrer que $f'(x) = 1 + \dfrac{\sqrt{x}}{2x^2}$.

c) En déduire le tableau de signes de $f'(x)$, puis le tableau des variations de f.

d) Calculer la limite de $f(x)$ lorsque $x \to +\infty$. Placer cette limite dans le tableau de variations.

e) Calculer la limite de $f(x)$ lorsque $x \to 0^+$. Placer cette limite dans le tableau de variations.