Études de Fonctions

① Recherche du domaine de définition

Le plus souvent une fonction est définie par une formule. Cette formule contient une variable « muette » qu'on peut remplacer par n'importe quelle valeur, même s'il y a quelques interdits :

- on ne divise pas par zéro,
- on ne prend pas la racine carrée d'un nombre strictement négatif,
- on ne prend pas le logarithme d'un nombre négatif ou nul.

ça, c'est pour plus tard.

Lorsqu'il n'est pas donné dans l'énoncé, chercher le domaine de définition d'une fonction consiste à trouver toutes les valeurs interdites de la variable muette.

La variable muette

Exemple 1 : $f(x) = \dfrac{1+x^2}{(x-1)(2x-1)}$.

théorème du produit nul

$f(x)$ a du sens $\iff (x-1)\times(2x-1) \neq 0 \iff x-1 \neq 0$ et $2x-1 \neq 0$

$x \neq 1$; $2x \neq 1$, $x \neq 1/2$

Le domaine de définition est donc $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2} ; 1\right\} = \left]-\infty ; \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2} ; 1\right[\cup \left]1 ; +\infty\right[$.

Exemple 2 : $g(x) = \sqrt{x+3} + \sqrt{9-x}$.

$g(x)$ a du sens $\iff x+3 \geqslant 0$ et $9-x \geqslant 0$

$x \geqslant -3$; $9 \geqslant x$

Le domaine de définition est donc $[-3 ; +\infty[\cap]-\infty ; 9] = [-3 ; 9]$.

② Les images

L'image d'un nombre par une fonction est le résultat du calcul obtenu en remplaçant toutes les occurrences de la variable muette par ce nombre. Chaque élément du domaine de définition possède une image, et une seule.

« l'image de $\frac{1}{2}$ par f » ou « f de $1/2$ ».

Exemple 1 : $f(x) = \dfrac{x+1}{x+3}$. Calculer $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

$$f\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}+3} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{2}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{6}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{7}{2}} = \frac{3}{2}\times\frac{2}{7} = \frac{3}{7}.$$

Exemple 2 : $g(x) = 2\times x^2 - 3x + 1$. Calculer $g(-4)$.

$$g(-4) = 2\times(-4)^2 - 3\times(-4) + 1 = 2\times 16 + 12 + 1 = 45.$$

lorsqu'on remplace la variable par une valeur, il y a des parenthèses autour de cette valeur :

x^2 avec $x=-4$ donne $(-4)^2 = 16$ et pas $-4^2 = -16$.

③ Les antécédents

C'est l'opération inverse : on donne le résultat, il faut retrouver par quelle valeur la variable a été remplacer. Chercher les antécédents de k par f revient donc à résoudre l'équation $f(x) = k$. Un nombre peut avoir aucun, un seul, ou plusieurs antécédents.

Exemple : $f(x) = (x-3)(2x+4)$. Trouver les antécédents de -12.

$$f(x) = -12 \iff (x-3)(2x+4) = -12 \iff 2x^2 - 6x + 4x - 12 = -12$$

théorème du produit nul

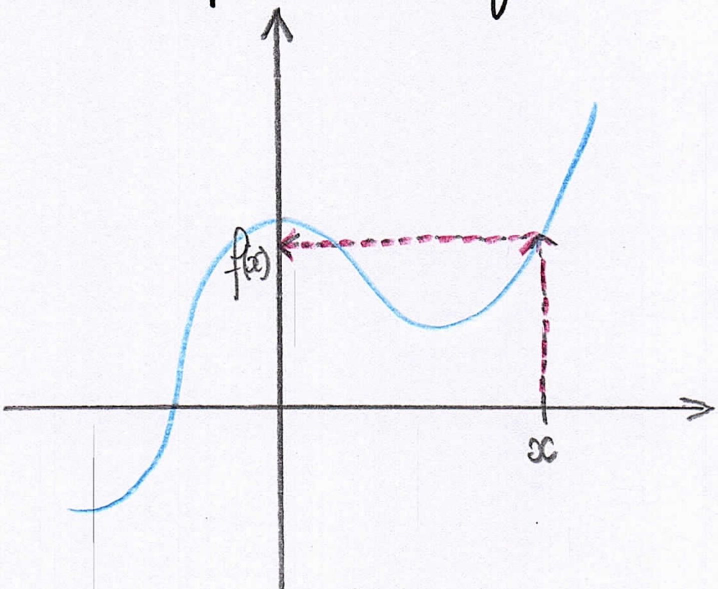
$$\iff 2x^2 - 2x = 0 \iff 2x(x-1) = 0 \iff 2x = 0 \text{ ou } x - 1 = 0$$

$$x = 0 \qquad\qquad x = 1$$

Les antécédents de -12 sont donc 0 et 1.

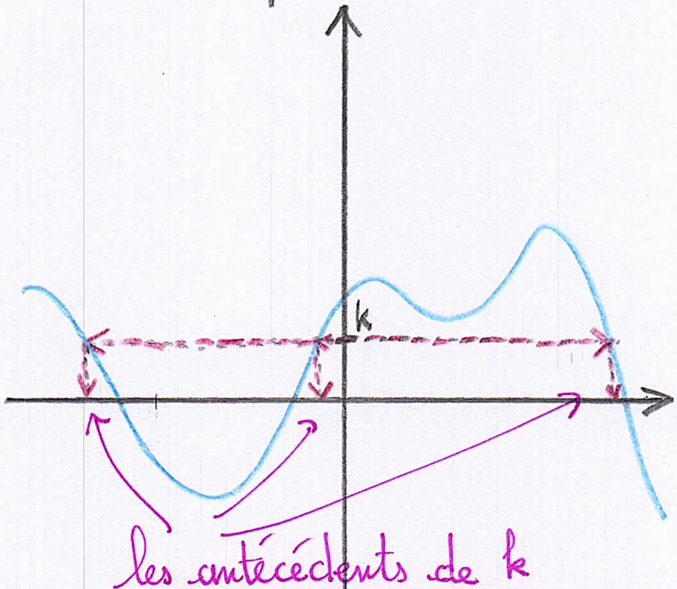
④ La courbe représentative

Soit f une fonction. Pour chaque x de son domaine de définition, on place dans un repère orthogonal le point $(x\,;f(x))$. On obtient ainsi la <u>courbe représentative</u> de f.



Lecture d'une image : on part de x sur l'axe des abscisses, on va « verticalement » jusqu'à la courbe, et on lit $f(x)$ sur l'axe des ordonnées.

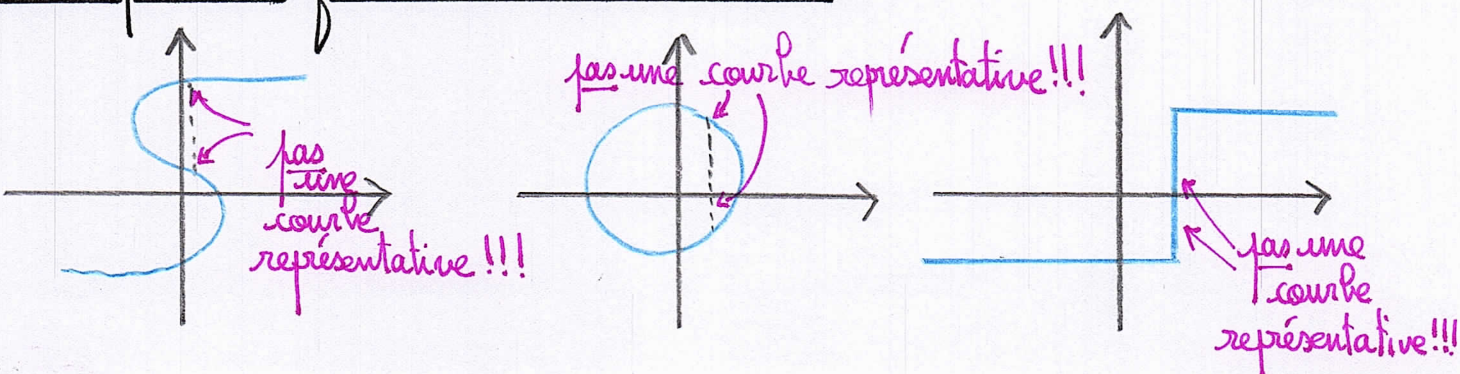
Il y a toujours <u>une et une seule</u> image !



Lecture des antécédents : on part de k sur l'axe des ordonnées, on trace une grande ligne horizontale, et on lit <u>toutes</u> les abscisses où cette ligne coupe (ou touche) la courbe.

Il peut y avoir plusieurs (ou aucun) ~~images~~ antécédents !

Remarque : puisqu'un x ne peut avoir qu'une seule image, et que x se trouve en abscisses, <u>une courbe représentative ne peut passer plusieurs fois à la même abscisse</u>.

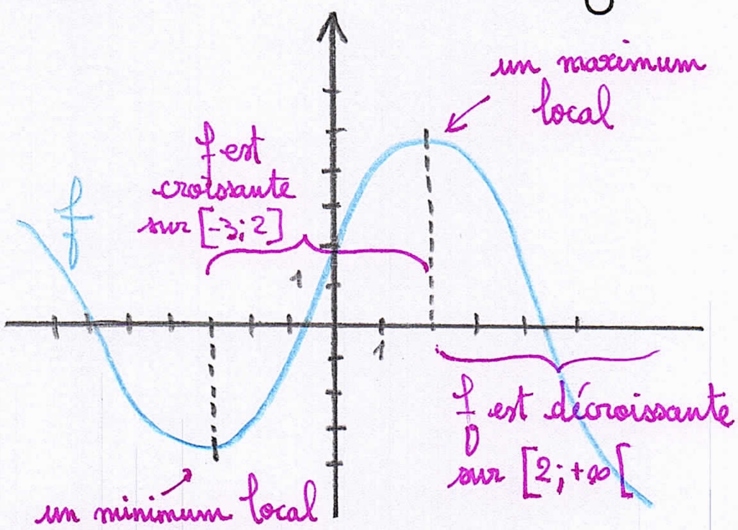


⑤ Les variations (pas Goldberg : celle de la fonction)

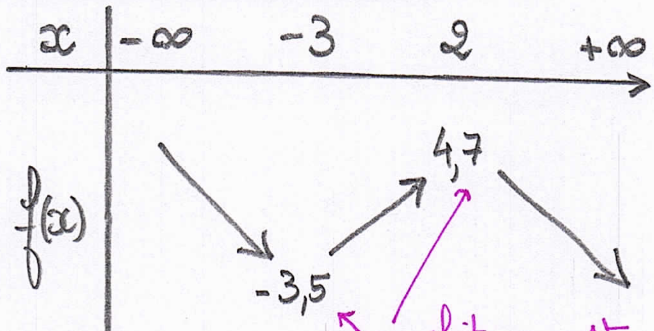
<u>Définitions</u> : i) on dit que f est croissante sur l'intervalle I si elle y préserve l'ordre, c'est-à-dire si pour tous x_1 et x_2 dans I, $f(x_1)$ et $f(x_2)$ sont dans le même ordre que x_1 et x_2.

ii) on dit que f est décroissante sur I si elle y renverse l'ordre, c'est-à-dire si pour tous x_1 et x_2 dans I, $f(x_1)$ et $f(x_2)$ sont dans l'ordre inverse de x_1 et x_2.

<u>Remarque</u> : sur la courbe, on regarde « si ça monte ou si ça descend ».



On résume tout ceci dans le <u>tableau des variations</u>.



on fait apparaître les extremums locaux.

⑥ La dérivée

Lorsqu'elle existe, la fonction dérivée indique <u>les variations instantanées</u> de la fonction. La dérivée de f se note f', et voici comment la calculer.

a) Les blocs élémentaires

ça, c'est pour plus tard.

fonction	$mx+p$	x^2	x^3	x^p	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x}$	e^x	$\ln(x)$
dérivée	m	$2x$	$3x^2$	px^{p-1}	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	e^x	$\frac{1}{x}$

la dérivée d'une fonction affine est son coefficient directeur

b) Les opérations

Si u et v sont des fonctions dérivables, on peut s'en servir pour construire des fonctions plus compliquées, dérivables, et dont les dérivées se calculent ainsi.

fonction	$u+v$	$u-v$	$u\times v$	$\frac{u}{v}$	$\frac{1}{u}$
dérivée	$u'+v'$	$u'-v'$	$u'\times v+u\times v'$	$\frac{u'\times v-u\times v'}{v^2}$	$-\frac{1}{u^2}$

fonction	u^p	e^u	$\sqrt{u}$	$\ln(u)$
dérivée	$pu^{p-1}\times u'$	$u'\times e^u$	$\frac{u'}{2\times\sqrt{u}}$	$\frac{u'}{u}$

ça, c'est pour plus tard.

<u>Exemple 1</u> : soit $f(x)=\frac{e^x}{x+1}$. Calculer $f'(x)$.

f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u=e^x \longrightarrow u'=e^x$

$v=x+1 \longrightarrow v'=1$

donc $f'(x)=\frac{u'\times v-u\times v'}{v^2}=\frac{e^x\times(x+1)-e^x\times 1}{(x+1)^2}$ ça c'est la réponse...

...mais une fois qu'on a appliqué la formule, on simplifie !

$=\frac{xe^x+e^x-e^x}{(x+1)^2}=\frac{xe^x}{x+1}$.

<u>Exemple 2</u> : soit $g(x)=\sqrt{x^2+7x-2}$. Calculer $g'(x)$.

g est de la forme $\sqrt{u}$ avec $u=x^2+7x-2 \longrightarrow u'=2x+7$

donc $g'(x) = \dfrac{u'}{2\times\sqrt{u}} = \dfrac{2x+7}{2\sqrt{x^2+7x-2}}$.

La dérivée sert à construire (sans passer par la courbe) le tableau de variations.

<u>THÉORÈME</u> : soit f une fonction dérivable et soit I un intervalle.

i) Si f' est positive sur I, alors f est croissante sur I.

ii) Si f' est négative sur I, alors f est décroissante sur I.

iii) Si f' est identiquement nulle sur I, alors f est constante sur I.

<u>Exemple</u>: étudier les variations de $f(x) = 2 + x - x^2$.

On a $f'(x) = 1 - 2x$, et $1 - 2x = 0 \iff 1 = 2x \iff \frac{1}{2} = x$.

D'abord on cherche les valeurs particulières et on dresse le tableau de signes de la dérivée.

x	$-\infty$		$1/2$		$+\infty$
$f'(x) = 1-2x$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$9/4$	$\searrow$	

⊕ donc croissant

⊖ donc décroissant

Ensuite on en déduit le tableau de variations de la fonction.

$f(\frac{1}{2}) = 2 + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{8}{4} + \frac{2}{4} - \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$.

Enfin on calcule les extremums locaux et on les ajoute au tableau.

⑦ <u>Les limites</u>

Il s'agit de voir ce qu'il advient d'une fonction aux extremités de son domaine de définition. Par exemple pour $f(x) = \dfrac{3}{x+2}$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x+2} = \frac{3}{(+\infty)+2} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3}{x+2} = \frac{3}{(-\infty)+2} = 0$$

Le domaine de définition est $]-\infty ; -2[\cup]-2 ; +\infty[$, ce qui fait <u>quatre</u> limites à trouver.

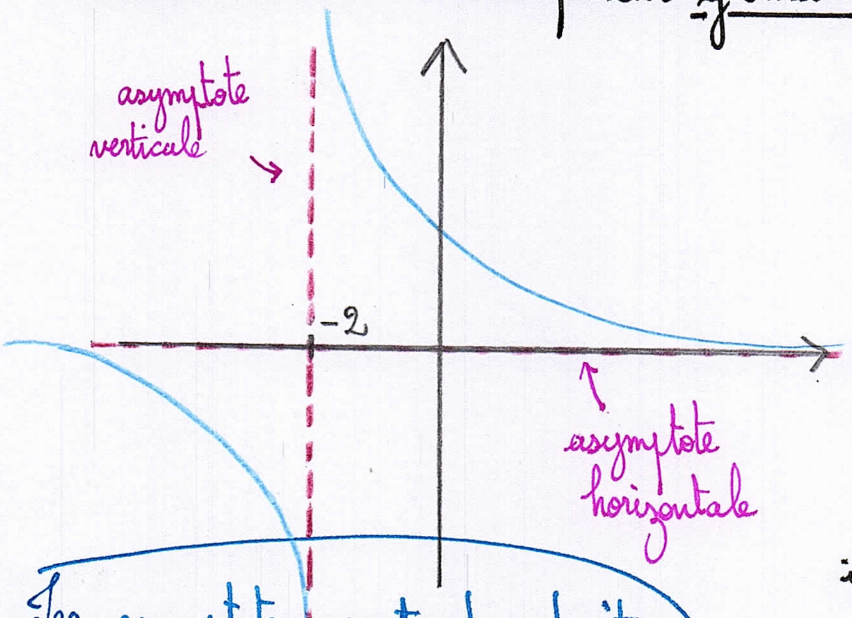
$$\lim_{x \to (-2)^+} \frac{3}{x+2} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

La règle des signes s'applique aussi aux limites.

$$\lim_{x \to (-2)^-} \frac{3}{x+2} = \frac{3}{0^-} = -\infty.$$

Lorsqu'on tombe sur une <u>forme indéterminée</u> $0 \times \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, on doit changer la forme de l'expression (en développant ou en factorisant) pour trouver la limite.

Certaines limites s'interprètent <u>géométriquement</u> :



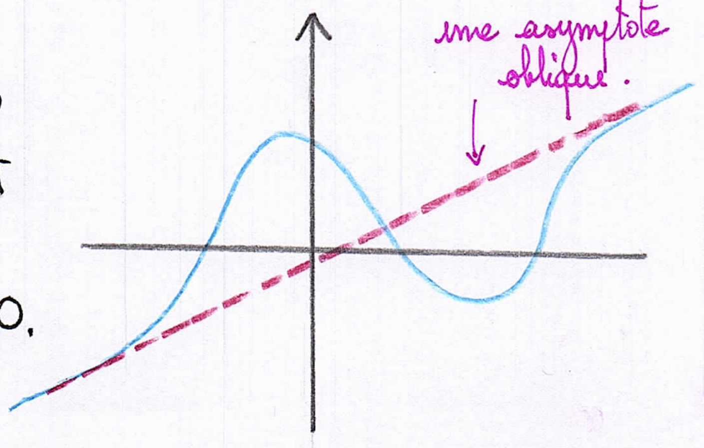
Les <u>asymptotes</u> sont des droites ~~vers~~ desquelles la courbe semble s'approcher.

<u>PROPRIÉTÉS</u> :

i) si $\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$, alors la droite d'équation $\boxed{x = a}$ est une <u>asymptote ~~horizont~~ verticale</u> à la courbe représentative. Idem si $\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$.

ii) si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$, alors la droite d'équation $\boxed{y = b}$ est une <u>asymptote horizontale</u> à la courbe représentative. Idem si $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$.

<u>PROPRIÉTÉ</u> : si $\lim_{x \to +\infty} f(x) - (mx+p) = 0$, alors la droite d'équation $y = mx+p$ est une asymptote oblique à la courbe représentative. Idem si $\lim_{x \to -\infty} f(x) - (mx+p) = 0$.

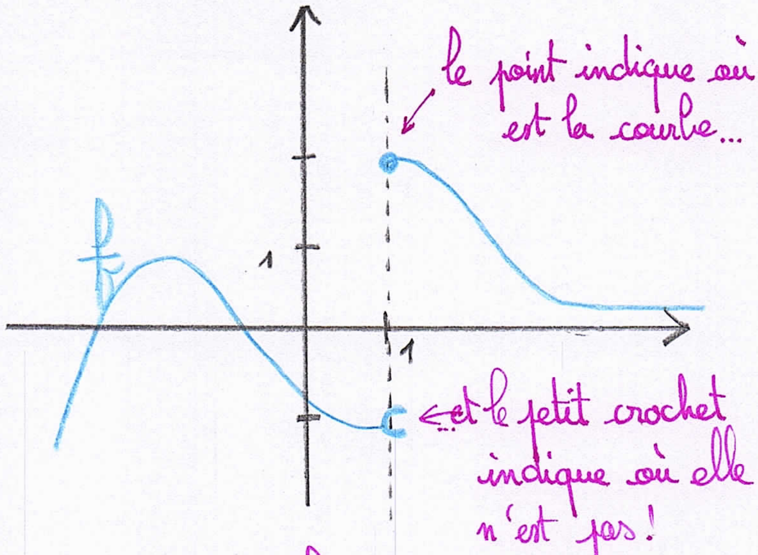


⑧ Continuité

On peut aussi calculer des limites <u>à l'intérieur</u> du domaine de définition :

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 2$$



→ ici $f(1) = 2$.

<u>DÉFINITION</u> : on dit que f est continue (en tout point d'un intervalle) si sa courbe se trace sans lever le crayon, c'est-à-dire si f a, en tout point, une limite à gauche et une limite à droite <u>égales à son image</u> :

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a).$$

<u>THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES</u> : si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors pour tout nombre k entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ possède <u>au moins une</u> solution.

<u>Application</u> : résolution (approchée) d'une équation par balayage.

Par exemple $x^3 - 4x + 5 = 3$. On prend $f(x) = x^3 - 4x + 5$.

x	$f(x)$
-3	-10
-2	5
-1	8
0	5
1	2
2	5
3	20

3 est entre $f(-3) = -10$ et $f(-2) = 5$ donc il y a une solution entre -3 et -2

idem entre 0 et 1

idem entre 1 et 2

x	$f(x)$
-3,0	-10
-2,9	-7,789
-2,8	-5,752
-2,7	-3,883
-2,6	-2,176
-2,5	-0,625
-2,4	+0,776
-2,3	2,033
-2,2	3,152
-2,1	4,139
-2,0	5

x	$f(x)$
-2,3	2,033
-2,29	2,151
-2,28	2,267
-2,27	2,383
-2,26	2,497
-2,25	2,609
-2,24	2,721
-2,23	2,830
-2,22	2,939
-2,21	3,046
-2,2	3,152

On fait pareil sur $[0;1]$ et sur $[1;2]$ pour les deux autres solutions !

→ il y a une solution entre −2,22 et −2,21, disons $x \simeq -2{,}215$.