MÉTHODES POUR LES ÉQUATIONS (1)

① Les formules générales

ÉQUATIONS RÉDUITES DU PREMIER DEGRÉ. Ce sont les équations de la forme $ax+b=0$ avec $a\neq 0$. Il y a une solution :

$$\boxed{x = -\frac{b}{a}}.$$

ÉQUATIONS RÉDUITES DU DEUXIÈME DEGRÉ. Ce sont les équations de la forme $ax^2+bx+c=0$ avec $a\neq 0$. On calcule le discriminant

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}.$$

* Si $\Delta > 0$ l'équation a deux solutions $\mathcal{S} = \left\{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} ; \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$

$$\boxed{x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}} \quad \text{et} \quad \boxed{x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}.$$

* Si $\Delta = 0$ l'équation a une solution $\mathcal{S} = \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$

$$\boxed{x_0 = \frac{-b}{2a}}.$$

* Si $\Delta < 0$ l'équation n'a pas de solution. $\mathcal{S} = \emptyset$

le symbole de l'ensemble vide (on ne met pas d'accolades)

② Deux équations particulières

Si, après réduction, on tombe sur :

$0 = 0 \longrightarrow$ tous les nombres (du domaine de définition) sont solutions de l'équation

$1 = 0 \longrightarrow$ il n'y a pas de solution.

Remarque : ne pas dire « on ne peut pas résoudre l'équation » : on l'a résolue, et l'ensemble des solutions est vide $\boxed{\mathcal{S} = \emptyset}$.

③ Équations-produits

THÉORÈME DU PRODUIT NUL : un produit est nul si et seulement si l'un (au moins) de ses facteurs est nul.

Ceci permet de séparer une équation-produit en plusieurs équations indépendantes :

$$(x^2-3x-7)\times(2x-5)\times(1-3x)=0 \Leftrightarrow x^2-3x-7=0$$
$$\text{ou } 2x-5=0 \text{ ou } 1-3x=0.$$

On résout ensuite chaque équation séparément.

④ Règles de transformation

RÈGLES : sans changer l'ensemble des solutions, on peut :

i) ajouter ou retrancher une même quantité aux deux membres d'une équation,

ii) multiplier ou diviser les deux membres d'une équation par une même quantité <u>non nulle</u>.

⑤ Élimination des carrés

Considérons une équation de la forme $X^2=k$.

i) $k>0$: $X^2=5 \Leftrightarrow X^2-5=0 \Leftrightarrow (X-\sqrt{5})\times(X+\sqrt{5})=0$

théorème du produit nul

$$\Leftrightarrow X-\sqrt{5}=0 \text{ ou } X+\sqrt{5}=0.$$
$$X=\sqrt{5} \qquad X=-\sqrt{5}$$

ii) $k=0$: $X^2=0 \Leftrightarrow X=0$.

iii) $k<0$: $X^2=-31$ Il n'y a pas de solution, car un carré n'est jamais négatif.

<u>Remarque</u>: X peut remplacer n'importe quoi :

$$(2x-3)^2 = 7 \iff 2x-3=\sqrt{7} \quad \text{ou} \quad 2x-3=-\sqrt{7}$$

ici $X = 2x-3$

$$\xrightarrow{+3} \quad 2x = 3+\sqrt{7} \qquad\qquad 2x = 3-\sqrt{7}$$

$$\xrightarrow{\div 2} \quad x = \frac{3+\sqrt{7}}{2} \qquad\qquad x = \frac{3-\sqrt{7}}{2}.$$

⑥ Bestiaire d'équations

i) $17x - 5 = 22x + 9$

$$\iff -5-9 = 22x-17x \quad (-9)\ (-17x)$$

$$\iff -14 = 5x$$

$$\iff \boxed{-\frac{14}{5} = x.} \quad (\div 5)$$

On regroupe les « x » d'un côté, le reste de l'autre, pour se ramener à du premier degré.

ii) $\dfrac{3x-5}{4} = 2x+7$

$$\iff 3x-5 = 8x+28 \quad (\times 4)$$

$$\iff -33 = 5x \quad (-3x)\ (-28)$$

$$\iff \boxed{-\frac{33}{5} = x.} \quad (\div 5)$$

On multiplie pour chasser les dénominateurs.

$$\frac{2x-2}{3} = \frac{4x+5}{5}$$

$$\iff 10x-10 = 12x+15 \quad (\times 3)\ (\times 5)$$

$$\iff -25 = 2x \quad (-10x)\ (-15)$$

$$\iff \boxed{-\frac{25}{2} = x.} \quad (\div 2)$$

Autre exemple de la même technique.

iii) $x\times(x-3)=(x+4)^2$

On développe et on réduit, pour voir si on aura du premier degré...

$\Leftrightarrow x^2-3x=x^2+8x+16$ $\quad -x^2 \quad +3x \quad -16$

$\Leftrightarrow -16=11x$ $\quad \div 11$

$\Leftrightarrow \boxed{-\frac{16}{11}=x.}$

$(2x-2)(x-5)=(x+3)^2-2x$

... ou du deuxième degré.

$\Leftrightarrow 2x^2-2x-10x+10=x^2+6x+9-2x$ $\quad -x^2 \quad -4x \quad -9$

$\Leftrightarrow x^2-16x+1=0$

$\begin{cases} a=1 \\ b=-16 \\ c=1 \end{cases}$ $\quad \Delta=b^2-4ac$
$=(-16)^2-4\times1\times1$
$=252>0$

Il y a deux solutions :

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-16)-\sqrt{252}}{2\times1}=\boxed{8-3\sqrt{7}}$

$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-16)+\sqrt{252}}{2\times1}=\boxed{8+3\sqrt{7}}.$

iv) <u>Deuxième degré incomplet</u>

$2x^2-3=0$ $\quad +3$

$\Leftrightarrow 2x^2=3$ $\quad \div 2$

$\Leftrightarrow x^2=3/2$ $\quad \sqrt{\ }$

$\Leftrightarrow \boxed{x=\sqrt{3/2}}$ ou $\boxed{x=-\sqrt{3/2}}.$

S'il manque le terme en x, on remonte les calculs à l'envers.

$3x^2+5x=0$

$\Leftrightarrow (3x+5)\times x=0$

$\Leftrightarrow 3x+5=0$ ou $\boxed{x=0.}$

$-5 \quad 3x=-5$

$\div 3 \quad \boxed{x=-5/3}$

S'il manque le terme constant on factorise.

v) $(x+4)\times(2x-7)=3$

$\Leftrightarrow 2x^2+8x-7x-28=3$

$\Leftrightarrow 2x^2 - x - 31 = 0 \quad \xleftarrow{-3}$

Pas de théorème du produit nul puisque le membre de droite n'est pas nul ! On développe et on réduit pour se ramener au deuxième degré !

$$\begin{cases} a=2 \\ b=-1 \\ c=-31 \end{cases} \qquad \begin{aligned} \Delta &= b^2-4ac \\ &= (-1)^2-4\times2\times(-31) \\ &= 249 > 0 \end{aligned}$$

Il y a deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)-\sqrt{249}}{2\times2} = \boxed{\frac{1-\sqrt{249}}{4}}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)+\sqrt{249}}{2\times2} = \boxed{\frac{1+\sqrt{249}}{4}}.$$

vi) Homographiques.

$$\frac{3x-7}{x+4}=5$$

L'inconnue apparaît au dénominateur donc il faut chercher les valeurs interdites éventuelles.

L'équation a du sens lorsque $x+4\neq0 \Leftrightarrow x\neq-4$. Pour $x\neq-4$ on a :

$$\frac{3x-7}{x+4}=5$$

Puis on résout avec un produit en croix.

Règle ii)

$\underset{x+4\neq0}{\Leftrightarrow} 3x-7=5x+20 \quad \times(x+4)$

← on multiplie les deux membres par une quantité non nulle.

$\Leftrightarrow -27 = 2x \quad -3x, \ -20$

$\Leftrightarrow -\frac{27}{2} = x. \quad \div 2$

Ce n'est pas une valeur interdite donc $\boxed{S=\left\{-\frac{27}{2}\right\}}$.

$$\frac{1}{3x+5}=4$$

Même technique.

L'équation a du sens lorsque $3x+5\neq0 \Leftrightarrow 3x\neq-5 \Leftrightarrow x\neq-\frac{5}{3}$.

Pour $x\neq-5/3$ on a :

$$\frac{1}{3x+5}=4 \underset{3x+5\neq0}{\overset{\times(3x+5)}{\Longleftrightarrow}} 1=4\times(3x+5) \Leftrightarrow 1=12x+20$$

$$\overset{-20}{\Longleftrightarrow} -19=12x \overset{\div12}{\Longleftrightarrow} -\frac{19}{12}=x.$$

Ce n'est pas une valeur interdite donc $\boxed{S=\left\{-19/12\right\}}$.

$$\frac{2x+7}{3x-4} = \frac{x+2}{x-1}$$

Toujours la même technique.

L'équation a du sens lorsque $3x-4 \neq 0$ et $x-1 \neq 0$.

$3x \neq 4$ $\qquad$ $x \neq 1$

$x \neq 4/3$

Pour $x \neq 1$ et $x \neq 4/3$ on a :

$$\frac{2x+7}{3x-4} = \frac{x+2}{x-1} \underset{\substack{3x-4\neq 0 \\ x-1\neq 0}}{\overset{\times(3x-4) \\ \times(x-1)}{\Longleftrightarrow}} (2x+7)\times(x-1) = (x+2)\times(3x-4)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+7x-2x-7 = 3x^2+6x-4x-8 \qquad -2x^2 \quad -5x \quad +7$$

$$\Leftrightarrow \cancel{0} \; 0 = x^2-3x-1.$$

$$\begin{cases} a=1 \\ b=-3 \\ c=-1 \end{cases} \qquad \begin{aligned} \Delta &= b^2-4ac \\ &= (-3)^2-4\times1\times(-1) \\ &= 9+4 = 13 > 0. \end{aligned}$$

Il y a deux solutions potentielles :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3)-\sqrt{13}}{2\times 1} = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3)+\sqrt{13}}{2\times 1} = \frac{3+\sqrt{13}}{2}.$$

Ce ne sont pas des valeurs interdites, donc

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{ \frac{3-\sqrt{13}}{2} ; \frac{3+\sqrt{13}}{2} \right\}}.$$