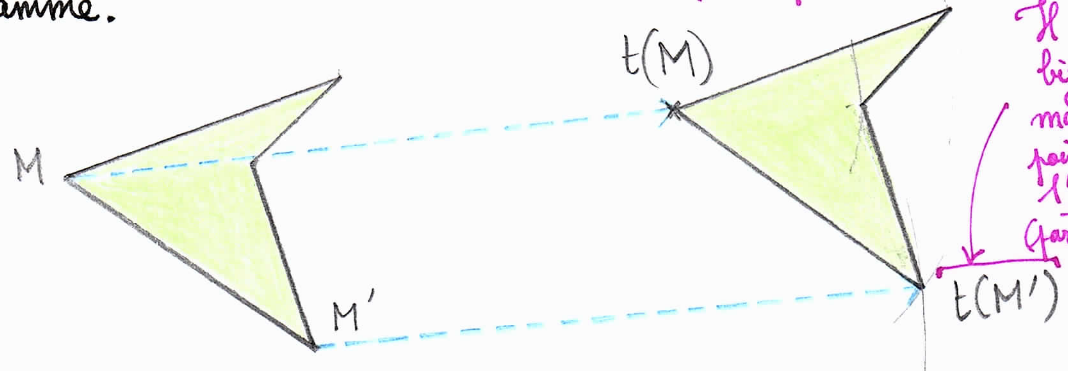
Vecteurs & colinéarité

① Définitions

Dans le plan, il y a des transformations géométriques qu'on appelle translations : une application $t : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ est une translation lorsque pour tous points $M, M' \in \mathcal{P}$ le quadrilatère $MM't(M')t(M)$ est un parallélogramme.

$\mathcal{P}$ est le plan

quatre points !



Il est écrit bizarrement mais c'est un point : c'est l'image de M' par la translation t).

Si l'on connaît M, son image $t(M)$ et M', il y a un seul point $t(M')$ qui fait de $MM't(M')t(M)$ un parallélogramme. Une translation est donc entièrement déterminée par la donnée d'un point A et de son image $B = t(A)$. Si A' et B' sont deux autres points, ils définissent la même translation si et seulement si $ABB'A'$ est un parallélogramme.

Définition : soit t une translation.

i) L'ensemble de tous les couples (A, B) tels que $B = t(A)$ est appelé vecteur de la translation.

ii) N'importe lequel de ces couples est appelé un représentant du vecteur.

iii) Le vecteur représenté par (A, B) se note $\overrightarrow{AB}$.

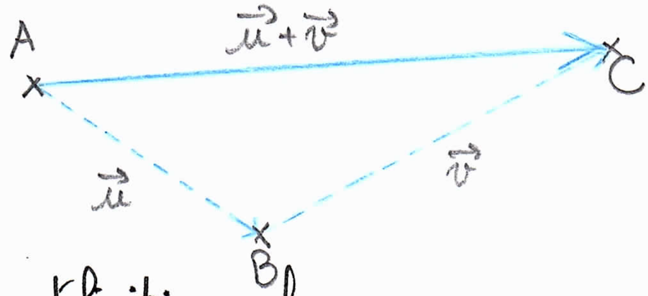
Remarque : par définition, on a donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ si et seulement si $ABB'A'$ est un parallélogramme.

On retiendra que si $\vec{u}$ est un vecteur, associé à la translation $t_{\vec{u}}$, et si $A \in \mathcal{P}$, alors $\boxed{\overrightarrow{AB} = \vec{u} \Longleftrightarrow B = t_{\vec{u}}(A)}$.

<u>DÉFINITION</u> : le vecteur associé à la translation « qui laisse chaque objet à sa place » est appelé <u>vecteur nul</u>. On le note $\vec{0}$. Pour tout $A \in \mathcal{P}$ on a donc $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

<u>DÉFINITION</u> : soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. L'enchaînement de $t_{\vec{u}}$ et $t_{\vec{v}}$ est encore une translation ; le vecteur qui lui est associé s'appelle <u>somme</u> de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et se note $\vec{u} + \vec{v}$.

Pour <u>construire</u> un représentant de $\vec{u} + \vec{v}$ on procède ainsi : on part d'un point A, on construit l'image $B = t_{\vec{u}}(A)$, puis l'image $C = t_{\vec{v}}(B)$. De sorte que $C = t_{\vec{v}}(B) = t_{\vec{v}}(t_{\vec{u}}(A)) = t_{\vec{u}+\vec{v}}(A)$.



On a donc par définition la

<u>RELATION DE CHASLES</u> : pour tous $A, B, C \in \mathcal{P}$ on a $\boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}}$.

<u>DÉFINITION</u> : soit $\vec{u}$ un vecteur. La transformation réciproque de $t_{\vec{u}}$ est encore une translation ; le vecteur qui lui est associé s'appelle <u>opposé</u> de $\vec{u}$ et se note $-\vec{u}$.

<u>Remarque</u> : on a $t_{-\vec{u}}(t_{\vec{u}}(M)) = M = t_{\vec{0}}(M)$ donc $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$. En particulier $\boxed{-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}}$, puisque $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

<u>Autre remarque</u> : on abrégera $\vec{u} + (-\vec{v})$ en $\vec{u} - \vec{v}$.

PROPRIÉTÉS : pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ on a :

i) $\vec{u}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{u}$,

ii) $\vec{u}+\vec{0} = \vec{0}+\vec{u} = \vec{u}$,

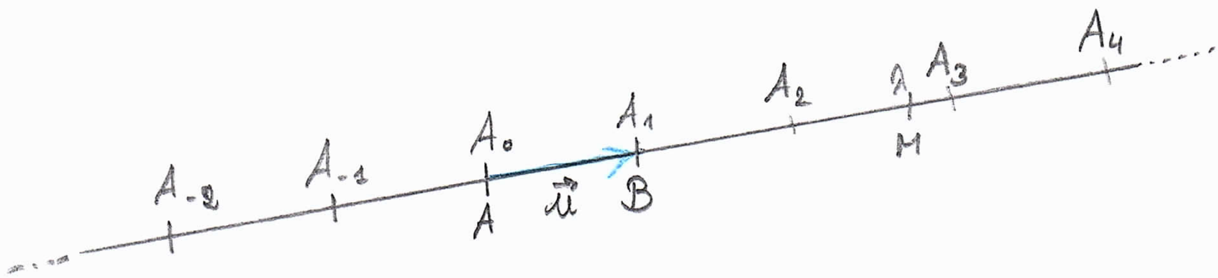
iii) $-\vec{0} = \vec{0}$,

iv) $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w}) = (\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$, ce qui permet d'écrire simplement $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$,

v) $-(\vec{u}+\vec{v}) = (-\vec{u})+(-\vec{v}) = -\vec{u}-\vec{v}$.

② Droites graduées, multiplications par un scalaire

Soient $\vec{u}$ un vecteur non nul et soit $A \in \mathcal{P}$. En notant $B = t_{\vec{u}}(A)$ on définit une droite (AB). On place des points sur cette droite : $A_0 = A$, $A_1 = t_{\vec{u}}(A_0)$ (c'est donc B), $A_2 = t_{\vec{u}}(A_1)$, $A_3 = t_{\vec{u}}(A_2)$, etc., puis $A_{-1} = t_{-\vec{u}}(A_0)$, $A_{-2} = t_{-\vec{u}}(A_{-1})$, etc. On obtient une <u>droite graduée</u>.



Cette graduation peut se subdiviser, et ainsi à tout $M \in (AB)$ on peut associer un réel λ qu'on appelle son <u>abscisse</u>. Réciproquement, si $\lambda \in \mathbb{R}$, il existe un point de (AB) (et un seul !) dont l'abscisse est λ.

DÉFINITION : soit $\lambda \in \mathbb{R}$, et soit $M \in (AB)$ le point à l'abscisse M. Le vecteur $\overrightarrow{AM}$ est appelé <u>produit</u> de $\vec{u}$ par λ et se note $\lambda \times \vec{u}$.
On complète cette définition (valable seulement pour $\vec{u} \neq \vec{0}$) en convenant que $\lambda \times \vec{0} = \vec{0}$.

PROPRIÉTÉS : pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et tous réels λ et μ on a :

i) $0 \times \vec{u} = \vec{0}$,

ii) $1 \times \vec{u} = \vec{u}$,

iii) $(-1) \times \vec{u} = -\vec{u}$,

iv) $\vec{u}+\vec{u} = 2\times\vec{u}$, $\vec{u}+\vec{u}+\vec{u} = 3\times\vec{u}$, etc.,

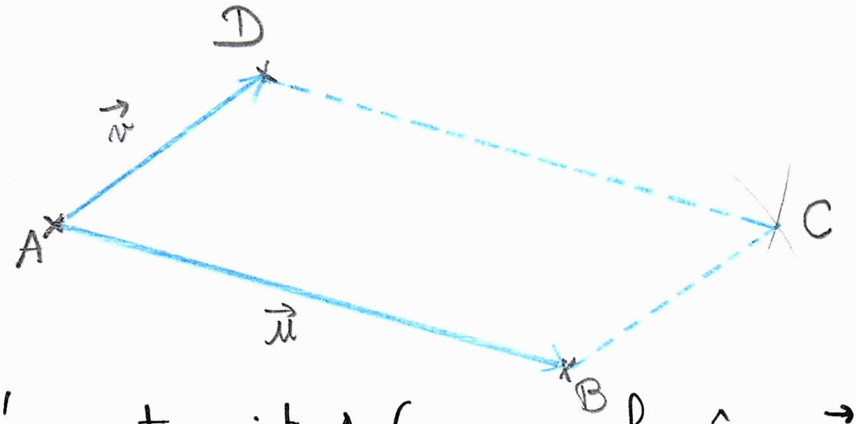
v) $\lambda\times\vec{u} + \mu\times\vec{u} = (\lambda+\mu)\times\vec{u}$,

vi) $\lambda\times\vec{u} + \lambda\times\vec{v} = \lambda\times(\vec{u}+\vec{v})$,

vii) $\lambda\times(\mu\times\vec{u}) = (\lambda\times\mu)\times\vec{u}$.

③ Déterminant, vecteurs colinéaires

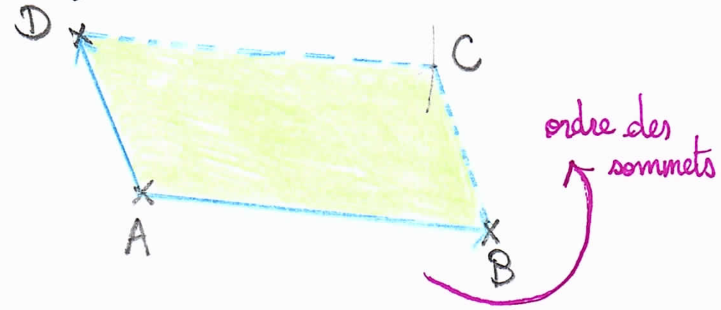
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On part d'un point A, et on construit $B = t_{\vec{u}}(A)$ et $D = t_{\vec{v}}(A)$. On ajoute un quatrième point C qui fait de ABCD un parallélogramme.



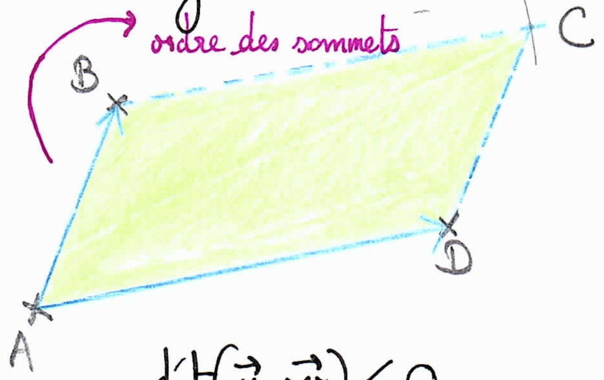
Si l'on part d'un autre point A (mais avec les mêmes $\vec{u}$ et $\vec{v}$) on obtient un autre parallélogramme, superposable à celui-ci, et orienté de la même manière.

Définition : l'aire algébrique de n'importe lequel de ces parallélogrammes (ils ont tous la même) s'appelle déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et se note $\det(\vec{u};\vec{v})$.

Remarque : aire « algébrique » signifie qu'on la compte positivement si les sommets du parallélogramme sont dans le sens trigonométrique, et négativement s'ils sont dans le sens des aiguilles d'une montre.



$\det(\vec{u};\vec{v}) > 0$



$\det(\vec{u};\vec{v}) < 0$.

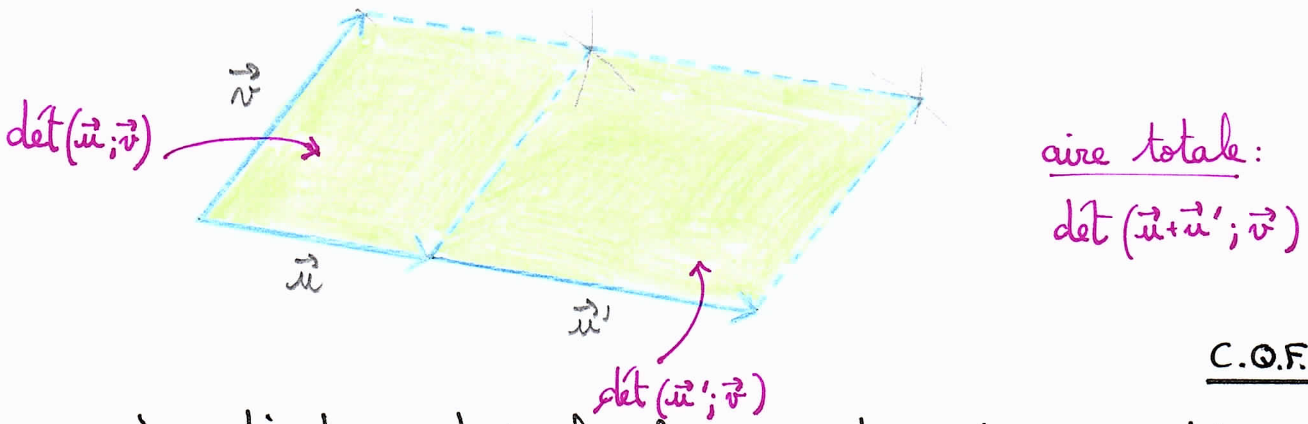
Propriétés : soient $\vec{u}$, $\vec{u}'$ et $\vec{v}$ des vecteurs. On a :

i) $\det(\vec{u}+\vec{u}'\,;\vec{v}) = \det(\vec{u}\,;\vec{v}) + \det(\vec{u}'\,;\vec{v})$,

ii) $\det(\vec{v}\,;\vec{u}) = -\det(\vec{u}\,;\vec{v})$,

iii) pour tout nombre λ : $\det(\lambda\times\vec{u}\,;\vec{v}) = \lambda\times\det(\vec{u}\,;\vec{v})$.

Démontrons le i) avec un petit dessin :



C.Q.F.D.

Remarque : à partir de ces trois formules, on peut en démontrer d'autres :

$$\det(\vec{u}\,;\vec{v}+\vec{v}') \underset{\text{formule ii)}}{=} -\det(\vec{v}+\vec{v}'\,;\vec{u}) \underset{\text{formule i)}}{=} -\left(\det(\vec{v}\,;\vec{u})+\det(\vec{v}'\,;\vec{u})\right)$$

$$\underset{\text{on développe}}{=} -\det(\vec{v}\,;\vec{u}) - \det(\vec{v}'\,;\vec{u}) \underset{\text{deux fois la formule ii)}}{=} \det(\vec{u}\,;\vec{v}) + \det(\vec{u}\,;\vec{v}').$$

Définition : on dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont <u>colinéaires</u> lorsque $\det(\vec{u}\,;\vec{v}) = 0$ (c'est-à-dire lorsque le parallélogramme est aplati).

Remarque : on a $\det(\vec{0}\,;\vec{v}) = \det(0\times\vec{0}\,;\vec{v}) = 0\times\det(\vec{0}\,;\vec{v}) = 0$, donc le vecteur nul est colinéaire à n'importe quel vecteur.

Autre remarque : un parallélogramme est aplati lorsque ses sommets sont alignés, ainsi $\boxed{\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AD} \text{ sont colinéaires} \iff A, B \text{ et } D \text{ sont alignés}}$.

De même, en choisissant un représentant de $\overrightarrow{CD}$ qui a pour origine le point A, on démontre que

$$\boxed{\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{CD} \text{ sont colinéaires} \iff (AB) \text{ et } (CD) \text{ sont parallèles}}.$$

PROPRIÉTÉ : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe deux nombres λ et μ, <u>pas tous les deux nuls</u>, tels que

Ceci s'appelle une <u>combinaison linéaire</u>. → $$\lambda \times \vec{u} + \mu \times \vec{v} = \vec{0}.$$

<u>Démonstration</u>: si $\vec{u} = \vec{0}$ on peut choisir $\lambda = 1$ et $\mu = 0$ et si $\vec{v} = \vec{0}$ on peut choisir $\lambda = 0$ et $\mu = 1$ pour avoir $\lambda \times \vec{u} + \mu \times \vec{v} = \vec{0}$. Dans les deux cas $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et la relation est vraie : il n'y a donc rien à démontrer.

À partir de maintenant on suppose donc que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas nuls. On doit démontrer une équivalence, c'est-à-dire l'<u>implication directe</u> et sa <u>réciproque</u>.

* <u>Implication directe</u> : on suppose $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires. Soient $A \in \mathcal{P}$, $B = t_{\vec{u}}(A)$ et $C = t_{\vec{v}}(A)$. Puisque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, les points A, B et C sont alignés. Soit λ l'abscisse de C sur (AB) dans la graduation définie par A et $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$. Par définition on a $\overrightarrow{AC} = \lambda \times \overrightarrow{AB}$. En posant $\mu = -1$ on obtient

car $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$

$$\lambda \times \vec{u} + \mu \times \vec{v} = \lambda \times \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} = \vec{0}.$$

* <u>Réciproque</u>: supposons qu'il existe λ et μ, pas tous les deux nuls, tels que $\lambda \times \vec{u} + \mu \times \vec{v} = \vec{0}$. Si $\mu \neq 0$ on a donc $\vec{v} = -\frac{\lambda}{\mu} \times \vec{u}$. Soit $A \in \mathcal{P}$, $B = t_{\vec{u}}(A)$ et C le point d'abscisse $-\frac{\lambda}{\mu}$ sur la droite graduée définie par A et $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. On a $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et puisque $C \in (AB)$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ (c'est-à-dire $\vec{u}$ et $\vec{v}$) sont colinéaires.

Si $\lambda \neq 0$, on a $\vec{u} = -\frac{\mu}{\lambda} \times \vec{v}$ et on fait la même chose en échangeant les rôles.

« ils ne sont pas tous les deux nuls ».

Puisque soit $\mu \neq 0$ soit $\lambda \neq 0$ (c'est l'hypothèse !) on a traité tous les cas.

<u>C.Q.F.D.</u>

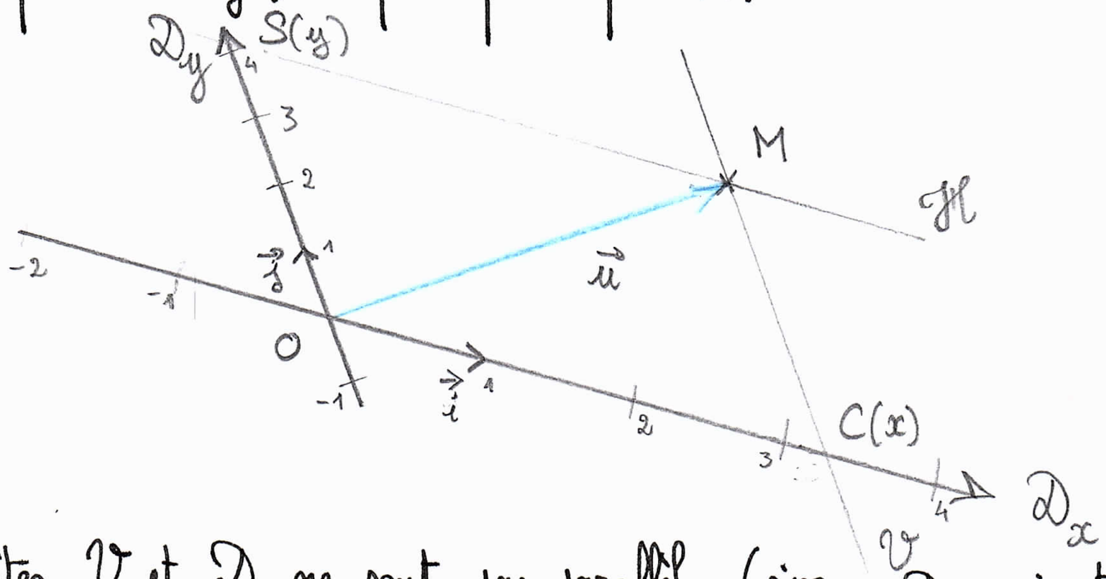
4 Repères cartésiens

DÉFINITIONS : soient $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs non colinéaires et soit $O \in \mathcal{P}$.

i) On dit que $(\vec{i}, \vec{j})$ forme une base.

ii) Et que $(O, \vec{i}, \vec{j})$ forme un repère.

Soit $\vec{u}$ un vecteur ; on pose $M = t_{\vec{u}}(O)$ (ou inversement : soit $M \in \mathcal{P}$, on pose $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$). Il existe une unique droite $\mathcal{H}$, parallèle à la droite graduée $\mathcal{D}_x$ définie par O et $\vec{i}$, et qui passe par M. De même, il existe une unique droite $\mathcal{V}$, parallèle à la droite graduée $\mathcal{D}_y$ définie par O et $\vec{j}$, et qui passe par M.



Les droites $\mathcal{V}$ et $\mathcal{D}_x$ ne sont pas parallèles (sinon, $\mathcal{D}_y$ qui est parallèle à $\mathcal{V}$, serait aussi parallèle à $\mathcal{D}_x$ et $\vec{i}$ et $\vec{j}$ seraient colinéaires). Elles se rencontrent donc en un point C, dont on note x l'abscisse sur $\mathcal{D}_x$. De même $\mathcal{H}$ et $\mathcal{D}_y$ ne sont pas parallèles donc elles se rencontrent en un point S, dont on note y l'abscisse sur $\mathcal{D}_y$.

DÉFINITIONS : i) $\mathcal{D}_x$ et $\mathcal{D}_y$ s'appellent les axes du repère.

ii) On appelle coordonnées du point M le couple $(x ; y)$.

iii) On appelle aussi coordonnées du vecteur $\vec{u}$ le couple $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, noté en colonnes (pour ne pas confondre points et vecteurs).

Remarque : pour distinguer les deux axes, on garde le mot <u>abscisse</u> pour la coordonnée x, mais on utilisera le mot <u>ordonnée</u> pour la coordonnée y.

Par définition on a $\boxed{\vec{u} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OS} = x \times \vec{i} + y \times \vec{j}}$.

relation de Chasles

$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{OS}$ car OCMS est un parallélogramme.

PROPRIÉTÉ : si A a pour coordonnées $(x_A ; y_A)$ et B pour coordonnées $(x_B ; y_B)$, alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

Démonstration : on a $\overrightarrow{OB} = x_B \times \vec{i} + y_B \times \vec{j}$ et $\overrightarrow{OA} = x_A \times \vec{i} + y_A \times \vec{j}$ (donc $-\overrightarrow{OA} = -x_A \times \vec{i} - y_A \times \vec{j}$). Ainsi :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = -x_A \times \vec{i} - y_A \times \vec{j} + x_B \times \vec{i} + y_B \times \vec{j}$$

$$= (x_B - x_A) \times \vec{i} + (y_B - y_A) \times \vec{j}.$$

Donc les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$. <u>C.Q.F.D.</u>

PROPRIÉTÉ : soient $\vec{u} \begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{v}} \end{pmatrix}$ deux vecteurs et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

i) Les coordonnées de $\vec{u} + \vec{v}$ sont $\begin{pmatrix} x_{\vec{u}} + x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{u}} + y_{\vec{v}} \end{pmatrix}$.

ii) Les coordonnées de $\lambda \times \vec{u}$ sont $\begin{pmatrix} \lambda \times x_{\vec{u}} \\ \lambda \times y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$.

5 Repères orthonormés

DÉFINITIONS : Soit u un vecteur.

Dès qu'on en a une, on les connaît toutes : ce sont toutes celles qui lui sont parallèles.

i) L'ensemble de toutes les droites graduées $(A, \vec{u})$ s'appelle la <u>direction</u> de $\vec{u}$. Le vecteur nul n'a pas de direction.

ii) Sur une telle droite, $\vec{u}$ définit un <u>sens</u> : le côté des abscisses positives.

iii) Si l'on a fixé une unité de longueur dans le plan, on appelle <u>norme</u> de $\vec{u}$ la longueur de tout segment $[AB]$ formé à partir d'un représentant $\overrightarrow{AB}$ de $\vec{u}$ (ils ont tous la même).
La norme se note $\|\vec{u}\|$.

<u>DÉFINITION</u> : on dit que le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est <u>orthonormé</u> lorsque ses axes sont perpendiculaires et que

i) $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont tous les deux de norme 1 (si on dispose d'une unité de longueur dans le plan),

ii) ou, si aucune unité de longueur n'est fixée, que $[OI]$ et $[OJ]$ sont superposables, avec $I = t_{\vec{i}}(O)$ et $J = t_{\vec{j}}(O)$. Dans ce cas, on prend le segment $[OI]$ comme unité de longueur, et alors on a $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$.

<u>PROPRIÉTÉ</u> : lorsque le repère est orthonormé, on a

$$\boxed{\|\vec{u}\| = \sqrt{x_{\vec{u}}^2 + y_{\vec{u}}^2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}.$$

<u>Démonstration</u> : la première formule résulte de la seconde, en choisissant un représentant $\overrightarrow{AB}$ de $\vec{u}$. Il n'y a donc qu'à prouver cette deuxième formule, et on utilise le théorème de Pythagore : soit $H(x_B, y_A)$. Alors

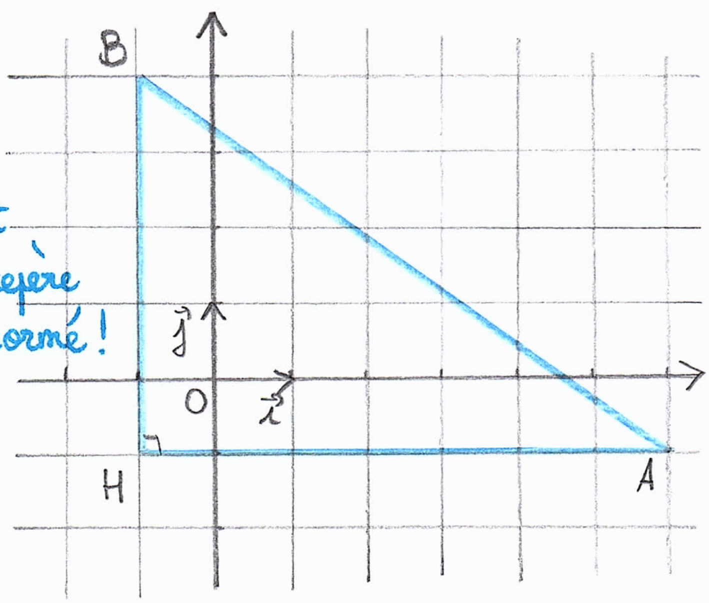
$$HA^2 = (x_A - x_H)^2 = (x_A - x_B)^2$$
$$= (x_B - x_A)^2$$

$$HB^2 = (y_B - y_H)^2 = (y_B - y_A)^2$$

donc $AB^2 = HA^2 + HB^2$

$$\iff AB = \sqrt{HA^2 + HB^2}$$
$$= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Ça c'est un repère orthonormé !

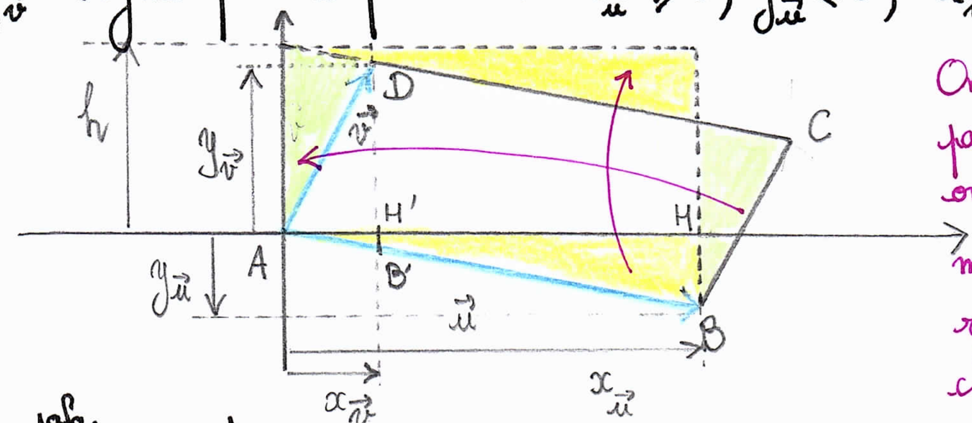


C.Q.F.D.

Propriété : lorsque le repère est orthonormé, on a

$$\boxed{\text{dét}(\vec{u};\vec{v}) = x_{\vec{u}} \times y_{\vec{v}} - x_{\vec{v}} \times y_{\vec{u}}}\ .$$

Démonstration : il faut étudier au cas par cas, selon les signes de $x_{\vec{u}}$, $y_{\vec{u}}$, $x_{\vec{v}}$ et $y_{\vec{v}}$. Voyons par exemple le cas $x_{\vec{u}} \geqslant 0$, $y_{\vec{u}} \leqslant 0$, $x_{\vec{v}} \geqslant 0$ et $y_{\vec{v}} \geqslant 0$.



On découpe le parallélogramme et on réorganise les morceaux en un rectangle. Cela ne change pas l'aire.

Ici on a $\mathcal{A}^{\text{alg.}}_{ABCD} = \mathcal{A}_{\text{rectangle}} = x_{\vec{u}} \times h = x_{\vec{u}} \times y_{\vec{v}} - x_{\vec{u}} \times (\underbrace{y_{\vec{v}} - h}_{\text{négatif !}})$.

Ensuite on remarque une situation de Thalès : AB'H' se déduit de ABH par une homothétie de rapport $x_{\vec{v}}/x_{\vec{u}}$, donc son aire (algébrique) se déduit de celle de ABH en multipliant par $(x_{\vec{v}}/x_{\vec{u}})^2$. Ainsi :

$$\mathcal{A}^{\text{alg.}}_{AB'H'} = \mathcal{A}^{\text{alg.}}_{ABH} \times \left(\frac{x_{\vec{v}}}{x_{\vec{u}}}\right)^2 \Longleftrightarrow \frac{AH' \times H'B'}{2} = \frac{AH \times HB}{2} \times \left(\frac{x_{\vec{v}}}{x_{\vec{u}}}\right)^2$$

$AH' = h - y_{\vec{v}}$ car le petit bout AB'H' de triangle jaune se retrouve dans le triangle jaune « du haut ».

$HB = -y_{\vec{u}}$ car $y_{\vec{u}}$ est négatif.

$$\Longleftrightarrow \frac{x_{\vec{v}} \times (h - y_{\vec{v}})}{2} = \frac{x_{\vec{u}} \times (-y_{\vec{u}})}{2} \times \left(\frac{x_{\vec{v}}}{x_{\vec{u}}}\right)^2$$

$\times x_{\vec{u}}^2$

$$\Longleftrightarrow x_{\vec{u}} \times \cancel{(x_{\vec{u}} \times x_{\vec{v}})} \times \frac{h - y_{\vec{v}}}{2} = \frac{-y_{\vec{u}}}{2} \times \cancel{(x_{\vec{u}} \times x_{\vec{v}})} \times x_{\vec{v}}$$

$\times 2$

$$\Longleftrightarrow \underbrace{x_{\vec{u}} \times (y_{\vec{v}} - h)}_{} = \underbrace{y_{\vec{u}} \times x_{\vec{v}}}_{}\ .$$

et on change les signes.

Revenons à l'aire du parallélogramme :

$$\mathcal{A}^{\text{alg.}}_{ABCD} = x_{\vec{u}} \times y_{\vec{v}} - \overbrace{x_{\vec{u}} \times (y_{\vec{v}} - h)} = x_{\vec{u}} \times y_{\vec{v}} - \overbrace{x_{\vec{v}} \times y_{\vec{u}}}\ .$$

Les autres cas se traitent de manières analogues.

C.Q.F.D.

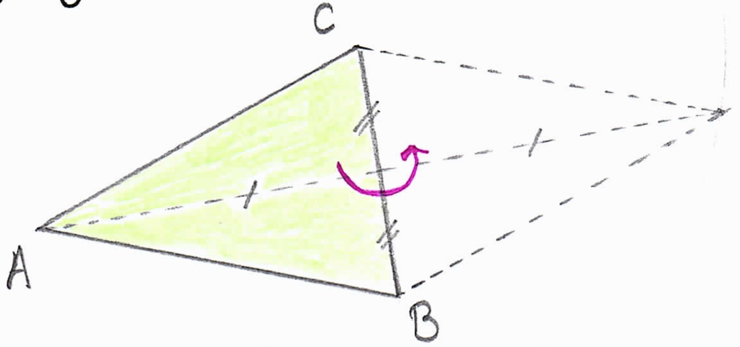
Ceci donne un moyen très efficace pour calculer l'aire des parallélogrammes et des triangles dans les repères orthonormés.

<u>PROPRIÉTÉ</u> : dans un repère orthonormé, on a :

i) si ABCD est un parallélogramme $\mathcal{A}^{alg}_{ABCD} = \begin{vmatrix} x_B - x_A & x_D - x_A \\ y_B - y_A & y_D - y_A \end{vmatrix}$;

i) si ABC est un triangle $\mathcal{A}^{alg}_{ABC} = \frac{1}{2} \times \begin{vmatrix} x_B - x_A & x_C - x_A \\ y_B - y_A & y_C - y_A \end{vmatrix}$;

où $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$ désigne « le produit en croix » $x \times y' - x' \times y$.



Un triangle est toujours la moitié d'un parallélogramme !

Revenons aux repères quelconques pour finir.

<u>PROPRIÉTÉ</u> : dans un <u>repère quelconque</u>, on a toujours

$$\boxed{\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ colinéaires} \iff \begin{vmatrix} x_{\vec{u}} & x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{u}} & y_{\vec{v}} \end{vmatrix} = 0.}$$

<u>Démonstration</u> : dans un repère orthonormé c'est vrai puisque le produit en croix est égal au déterminant (l'aire du parallélogramme). Dans un repère quelconque, on a toujours : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires $\iff$ il existe deux nombres λ et μ, pas tous les deux nuls, tels que $\lambda \times \vec{u} + \mu \times \vec{v} = \vec{0}$.
Quitte à échanger les rôles, on peut supposer que λ n'est pas nul, et la relation équivaut à $\vec{u} = -\mu/\lambda \times \vec{v} \iff \begin{cases} x_{\vec{u}} = -\mu/\lambda \times x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{u}} = -\mu/\lambda \times y_{\vec{v}} \end{cases}$

$\times \frac{-\mu}{\lambda}$

$\iff$

$x_{\vec{u}}$	$y_{\vec{u}}$
$x_{\vec{v}}$	$y_{\vec{v}}$

est un tableau de proportionnalité (de rapport $-\mu/\lambda$)

produit en croix !

$\iff x_{\vec{u}} \times y_{\vec{v}} - x_{\vec{v}} \times y_{\vec{u}} = 0.$

C.Q.F.D.