PETITES FRACTIONS

① Les demis (sans malt ni houblon)

$\frac{1}{2} = 0{,}5$

$-4/2$	$-3/2$	$-2/2$	$-1/2$	$0/2$	$1/2$	$2/2$	$3/2$	$4/2$	$5/2$
-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2	$2{,}5$

Pour un entier a : $\frac{a}{2}$ est $\begin{cases} \text{entier si a est pair} \\ \dots,5 \text{ si a est impair.} \end{cases}$

PROPRIÉTÉ : l'arrondi à l'entier le plus proche d'un réel x est $\lfloor x + 1/2 \rfloor$ (la partie entière de $x + 1/2$).

② Les tiers

$\frac{1}{3} \simeq 0{,}333\,333\dots$

$-3/3$	$-2/3$	$-1/3$	$0/3$	$1/3$	$2/3$	$3/3$	$4/3$	$5/3$	$6/3$	$7/3$	$8/3$	$9/3$	$10/3$
-1	$-0{,}66\dots$	$-0{,}33\dots$	0	$0{,}33\dots$	$0{,}66\dots$	1	$1{,}33\dots$	$1{,}66\dots$	2	$2{,}33\dots$	$2{,}66\dots$	3	$3{,}33\dots$

Pour trouver la valeur décimale de $\frac{a}{3}$, on encadre a entre deux multiples de 3. Par exemple pour $17/3$:

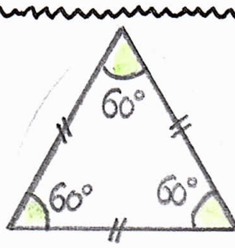
$\underset{\text{multiples de 3}}{15} \leq 17 \leq 18$

$15/3$	$16/3$	$17/3$	$18/3$
5	$5{,}33\dots$	$5{,}66\dots$	6

$\frac{17}{3} \simeq 5{,}666\,666\dots$

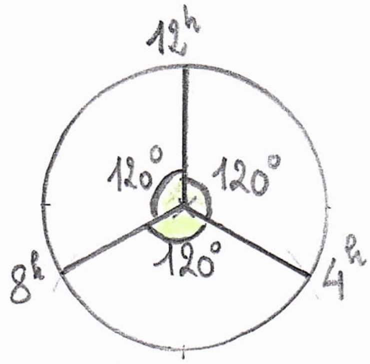
Choses qui se divisent en 3 :

$\frac{180°}{3} = 60°$



triangle équilatéral

$\frac{360°}{3} = 120°$

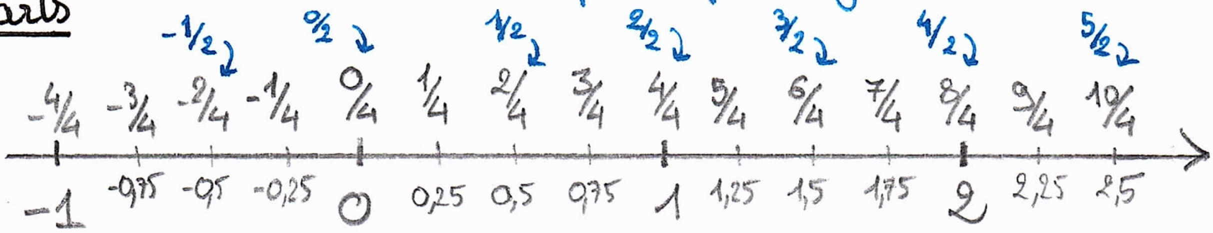


$\frac{1h}{3} = 1/3\,h \iff \frac{60 \text{ min}}{3} = 20 \text{ min} \iff \frac{3600 \text{ s}}{3} = 1200 \text{ s}.$

③ Les quarts

Les demis sont des quarts qui s'ignorent...

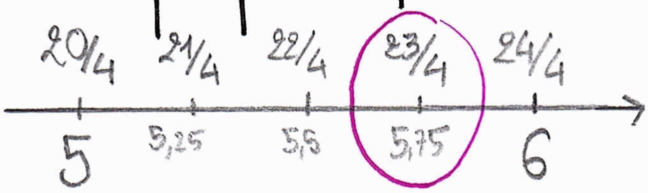
$\frac{1}{4} = 0,25$



Pour trouver la valeur décimale de $\frac{a}{4}$, on encadre a entre deux multiples de 4. Par exemple pour $23/4$:

$20 \leqslant 23 \leqslant 24$

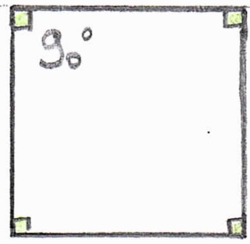
multiples de 4



$\frac{23}{4} = 5,75.$

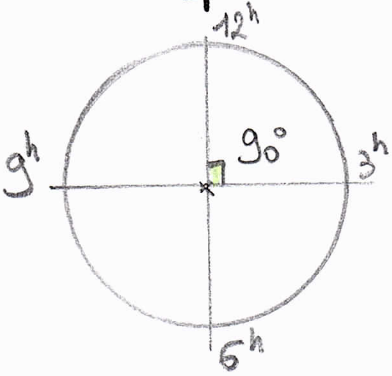
Choses qui se divisent en 4 :

$\frac{1 \text{ tr}}{4} = 1/4 \text{ tr} \iff \frac{360°}{4} = 90°$



un carré

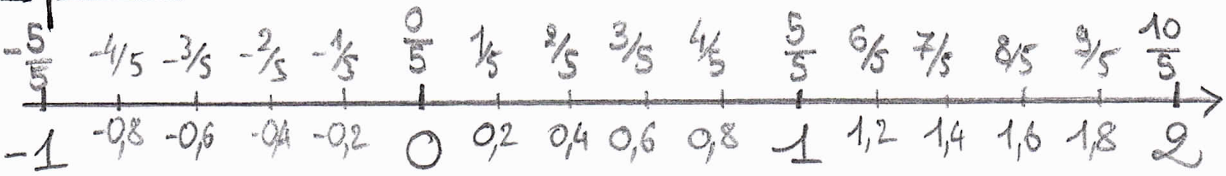
La somme des angles d'un quadrilatère vaut 360°.



$\frac{1 h}{4} = 1/4 h \iff \frac{60 \text{ min}}{4} = 15 \text{ min} \iff \frac{3600 \text{ s}}{4} = 900 \text{ s}.$

④ Les cinquièmes

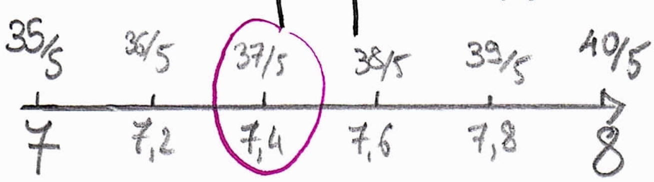
$\frac{1}{5} = 0,2$



Pour trouver la valeur décimale de $\frac{a}{5}$, on encadre a entre deux multiples de 5. Par exemple pour $37/5$:

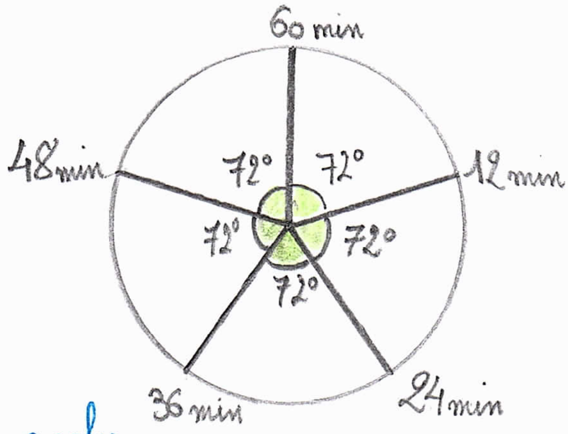
$35 \leqslant 37 \leqslant 40$

multiples de 5

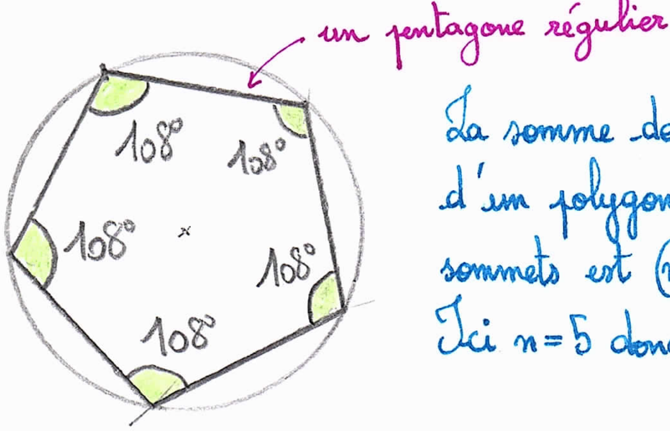


$\frac{37}{5} = 7,4.$

Choses qui se divisent en 5 :



$$\frac{1\text{ tr}}{5} = \frac{1}{5}\text{ tr} \Longleftrightarrow \frac{360°}{5} = 72°$$



La somme des angles d'un polygone à n sommets est $(n-2)\times 180°$. Ici $n=5$ donc $540°$.

$$\frac{1\text{ h}}{5} = \frac{1}{5}\text{ h} \Longleftrightarrow \frac{60\text{ min}}{5} = 12\text{ min}$$

$$\frac{540°}{5} = 108°.$$

⑤ Les subdivisions du demi

$$1 \xrightarrow{\div 2} \frac{1}{2} = 0{,}5 \xrightarrow{\div 2} \frac{1}{4} = 0{,}25 \xrightarrow{\div 2} \frac{1}{8} = 0{,}125 \xrightarrow{\div 2} \frac{1}{16} = 0{,}0625 \xrightarrow{\div 2} \frac{1}{32} = 0{,}03125 \quad \ldots$$

⑥ Les neuvièmes et leurs cousins

$$\frac{3}{9} = \frac{1}{3} = 0{,}333\ldots \quad \text{donc} \quad \xrightarrow{\div 3} \frac{1}{9} = 0{,}111\ldots \quad \text{puis} \quad \frac{2}{9} = 0{,}222\ldots \quad \frac{4}{9} = 0{,}444\ldots$$

Plus généralement soit $p \geq 1$ un entier et soit $x = 0{,}\underbrace{0001}_{p\text{ chiffres}}\underbrace{0001}_{p\text{ chiffres}}\ldots\ldots$

alors $10^p \times x = 1{,}\underbrace{0001}_{p\text{ chiffres}}\underbrace{0001}_{p\text{ chiffres}}\ldots$ et donc $10^p \times x - 1 = x$.

Mais $10^p \times x - 1 = x \Longleftrightarrow 10^p \times x - x = 1 \Longleftrightarrow (10^p - 1)x = 1$

$$\Longleftrightarrow x = \frac{1}{10^p - 1} = \frac{1}{\underbrace{99999}_{p\text{ chiffres}}}.$$

Applications :

$$\frac{4035}{9999} = 4035 \times \frac{1}{\underbrace{9999}_{4\text{ chiffres}}} = 4035 \times 0{,}\underbrace{0001}_{4\text{ chiffres}}0001\ldots = 0{,}\underbrace{4035}_{4\text{ chiffres}}4035\ldots$$

$$\frac{75}{99} = 75 \times \frac{1}{\underbrace{99}_{2\text{ chiffres}}} = 75 \times 0{,}\underbrace{01}_{2\text{ chiffres}}0101\ldots = 0{,}\underbrace{75}_{2\text{ chiffres}}7575\ldots$$

⑦ Les dixièmes et leurs subdivisions

$$\frac{1}{10} = 0{,}1 \qquad \frac{1}{100} = 0{,}01 \qquad \frac{1}{1000} = 0{,}001 \qquad \frac{1}{10^p} = \overbrace{0{,}\underbrace{000\ldots01}_{p \text{ chiffres}}}^{p \text{ zéros}}$$

Définition : on dit qu'un nombre est <u>décimal</u> s'il peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^p}$ avec $p \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{Z}$.

Ce sont les nombres qui ont une écriture avec un nombre <u>fini</u> de chiffres « après la virgule » :

$$\frac{42\,339}{10\,000} = 4{,}2339$$

car diviser par une puissance de 10 revient à décaler la virgule d'un certain nombre de positions.

Remarque : les nombres décimaux ont en fait une deuxième écriture :

$1{,}000\ldots = 0{,}999\ldots$ $\qquad$ $0{,}28 = 0{,}27999\ldots$ $\qquad$ etc.

c'est $\frac{9}{9} = 1$!

Soit $x = 0{,}27999\ldots$ alors

$100x = 27{,}999\ldots \Leftrightarrow 100x - 27 = 0{,}999\ldots = 1$

$\Leftrightarrow 100x = 28 \Leftrightarrow x = \frac{28}{100} = 0{,}28.$

Propriétés : i) tout nombre décimal est un nombre rationnel ;

ii) un nombre rationnel est décimal si et seulement si dans sa fraction <u>irréductible</u> $\frac{a}{b}$, le dénominateur b n'a que des facteurs 2 et 5.

⑧ Les onzièmes et leurs cousins

$$\frac{1}{11} = \frac{9}{99} = \frac{09}{\underbrace{99}_{2\text{ chiffres}}} = 0{,}\underbrace{09}_{2\text{ chiffres}}0909\ldots \qquad \frac{1}{111} = \frac{9}{999} = \frac{009}{\underbrace{999}_{3\text{ chiffres}}} = 0{,}\underbrace{009}_{3\text{ chiffres}}009009\ldots$$

etc.

⑨ Les douzièmes et leurs cousins

$$\frac{1}{12} = \frac{1}{4} \div 3 = 0{,}25 \div 3 \xrightarrow{\times 100} \quad \text{mais} \quad \frac{25}{3} = 8{,}333\ldots$$ (voir paragraphe sur les tiers)

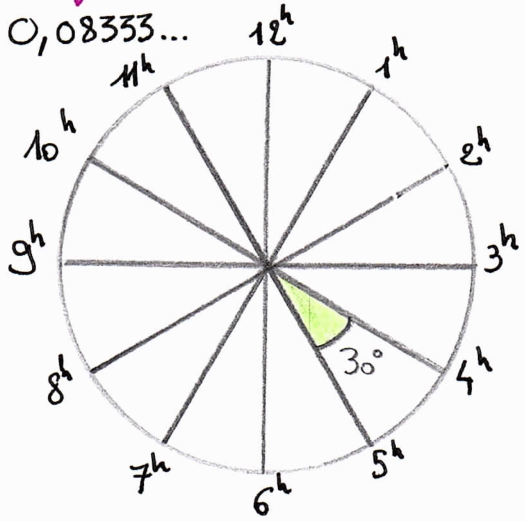
$\downarrow \div 100$

donc $\frac{1}{12} = 0{,}08333\ldots$

Choses qui se divisent en 12 :

$$\frac{1\,h}{12} = \frac{1}{12}\,h \Leftrightarrow \frac{60\text{ min}}{12} = 5\text{ min}$$

$$\frac{1\,tr}{12} = \frac{1}{12}\,tr \Leftrightarrow \frac{360°}{12} = 30°$$



Les nombres 12, 120, 1200, etc. ont beaucoup de diviseurs :

$$12 = 2^2 \times 3^1 \Longrightarrow 3 \times 2 = 6 \text{ diviseurs}$$

$$\mathcal{D}(12) = \{1;2;3;4;6;12\}$$

$$120 = 2^3 \times 5^1 \times 3^1 \Longrightarrow \cancel{3}\,4 \times 2 \times 2 = 16 \text{ diviseurs}$$

$$\mathcal{D}(120) = \{1;2;3;4;5;6;8;10;12;15;20;24;30;40;60;120\}$$

$$1200 = 2^4 \times 3^1 \times 5^2 \Longrightarrow 5 \times 2 \times 3 = 30 \text{ diviseurs}$$

$$\mathcal{D}(1200) = \{1;2;3;4;5;6;8;10;12;15;16;20;24;25;30;40;48;50;60;75;80;100;120;150;200;240;300;400;600;1200\}$$

Le nombre de diviseurs s'obtient à partir de la décomposition en nombres premiers en ajoutant 1 à tous les exposants, et en faisant le produit.

donc ils permettent de nombreuses simplifications dans les fractions :

$$\frac{120}{375} = \frac{2^3 \times 3^1 \times 5^1}{3^1 \times 5^3} = \frac{2^3}{5^2} = \frac{8}{25}.$$

3×125 et $125 = 5 \times 5 \times 5$