FONCTIONS POLYNOMIALES DU DEUXIÈME DEGRÉ

Ce sont les fonctions de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$. Leurs courbes représentatives s'appellent des <u>paraboles</u>.

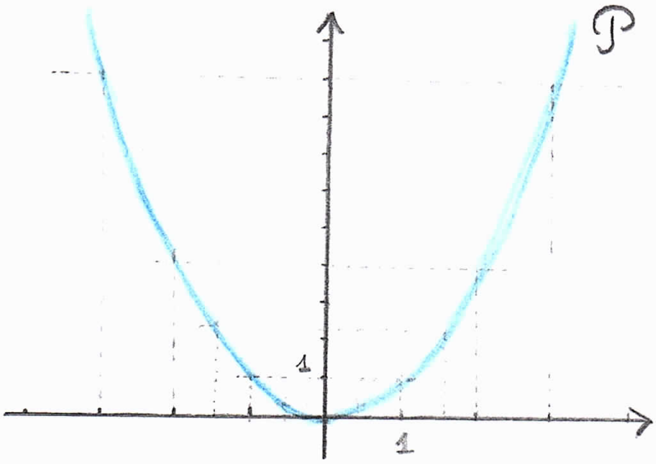
① <u>La fonction « carré »</u>

Il s'agit de $f(x) = x^2$, qui correspond à $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$.

antécédents

x	-3	$-\frac{3}{2}$	-1	0	$\frac{1}{2}$	2
x^2	9	$\frac{9}{4}$	1	0	$\frac{1}{4}$	4

images



PROPRIÉTÉ : les variations de la fonction carré sont données par le tableau :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

En particulier, $f(x) = x^2$ est toujours positif !

On rappelle qu'une fonction est <u>croissante</u> lorsqu'elle préserve la relation d'ordre : pour tous u et v, u et v sont dans le même ordre que leurs images $f(u)$ et $f(v)$. Ou encore : $v - u$ est du même signe que $f(v) - f(u)$. Lorsque la fonction renverse la relation d'ordre, on dit qu'elle est <u>décroissante</u>.

<u>Démonstration de la propriété</u> (ça se voit sur le graphique, mais vérifions par le calcul). Soient $u, v \in \mathbb{R}$. On a

$$f(v) - f(u) = v^2 - u^2 = (v-u) \times (u+v).$$

← troisième identité remarquable

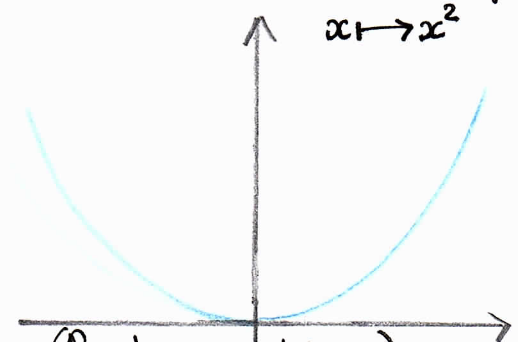
* Si u et v sont positifs, alors $u+v \geqslant 0$ et donc $f(v)-f(u)$ et $v-u$ sont du même signe : f est croissante sur $[0;+\infty[$.

* Si u et v sont négatifs, alors $u+v \leqslant 0$ et donc $f(v)-f(u)$ et $v-u$ sont de signes contraires : f est décroissante sur $]-\infty;0]$.

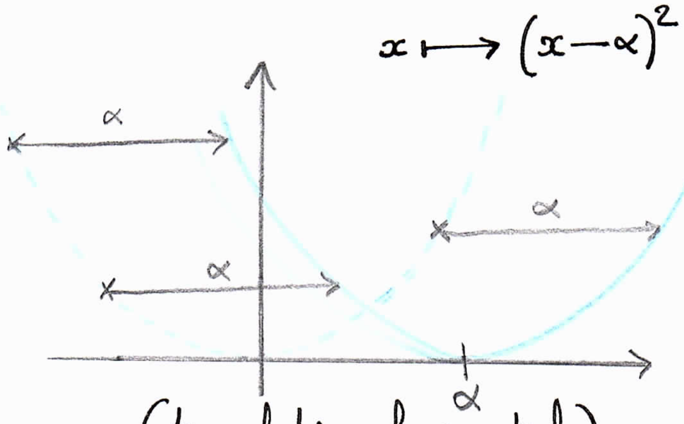
C.Q.F.D.

② Transformations géométriques

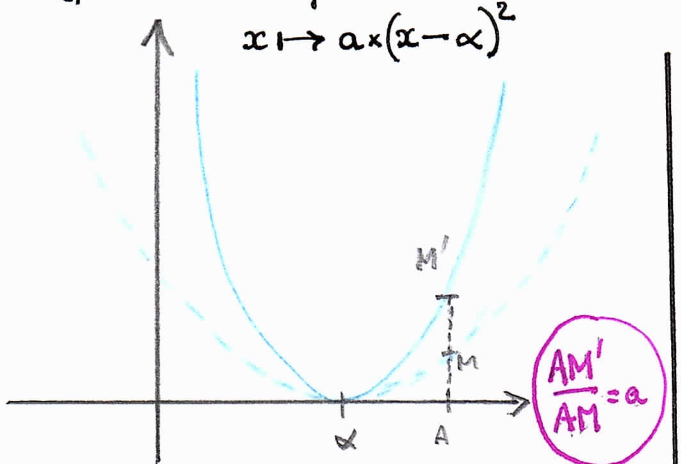
On va « compliquer » la fonction carrée.



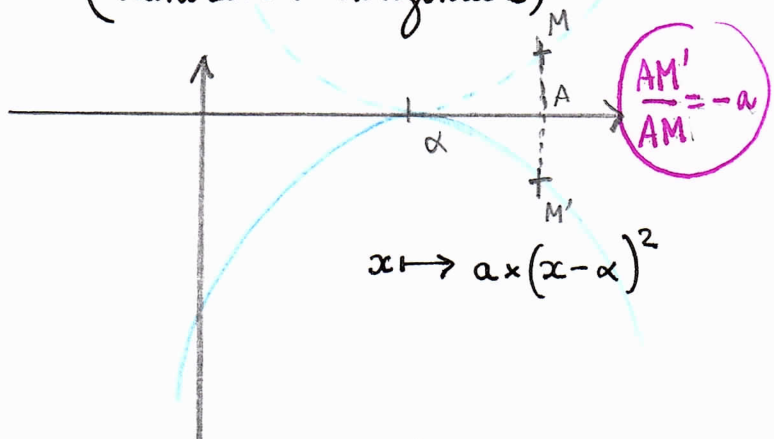
(fonction de départ)



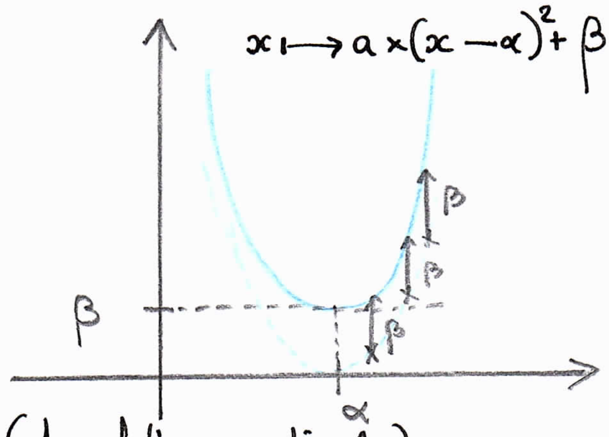
(translation horizontale)



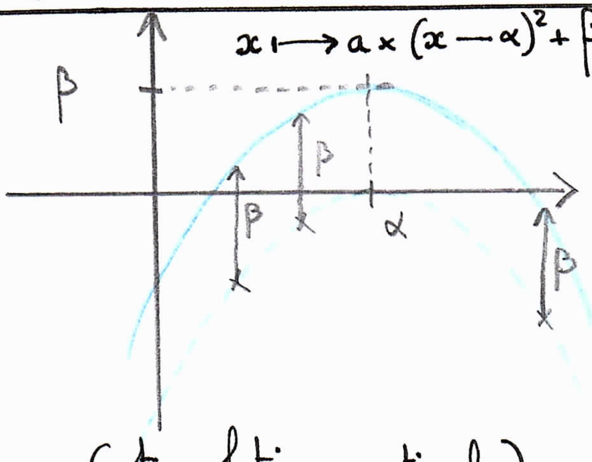
(dilatation verticale, $a > 0$)



(dilatation verticale, $a < 0$)



(translation verticale)



(translation verticale)

De ces transformations, on déduit de nouveaux tableaux de variations :

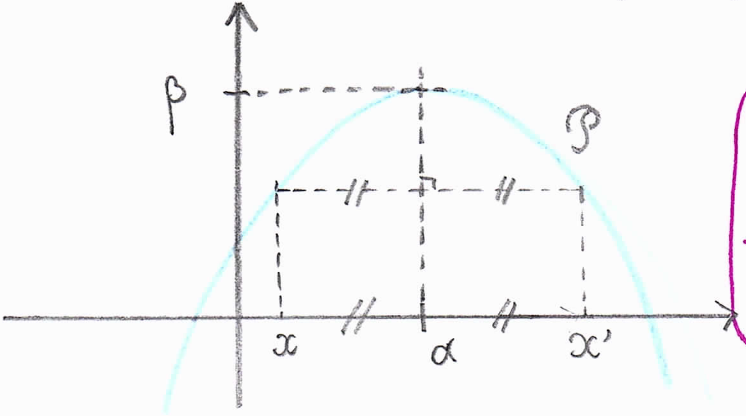
Cas $a>0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$	$+\infty$	↘	β	↗	$+\infty$

Cas $a<0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$	$-\infty$	↗	β	↘	$-\infty$

PROPRIÉTÉ : la droite verticale d'équation $x=\alpha$ est un axe de symétrie de la parabole : si $\frac{x+x'}{2} = \alpha$ alors $f(x) = f(x')$.



$$\frac{x+x'}{2} = \alpha$$
$$\Leftrightarrow x+x' = 2\alpha$$
$$\Leftrightarrow x' = 2\alpha - x$$

③ La forme canonique

Soient $a \neq 0$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On considère $f(x) = a \times (x-\alpha)^2 + \beta$. Il s'agit bien d'une fonction polynomiale du deuxième degré, puisque :

$$\begin{aligned} a \times (x-\alpha)^2 + \beta &= a \times (x^2 - 2\alpha x + \alpha^2) + \beta \\ &= a \times x^2 - 2\alpha a x + a\alpha^2 + \beta \\ &= ax^2 + \underbrace{(-2\alpha a)}_{b} x + \underbrace{(a\alpha^2 + \beta)}_{c}. \end{aligned}$$

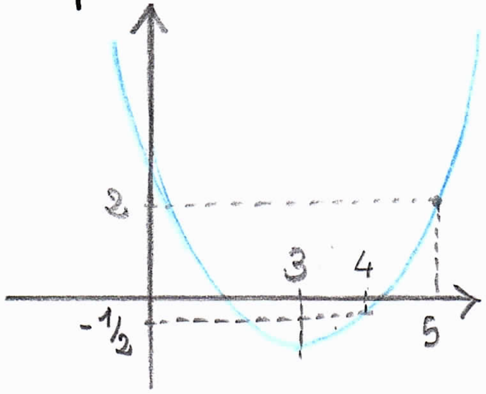
DÉFINITION : le point $S(\alpha ; \beta)$ s'appelle le sommet de la parabole. L'axe de symétrie passe par le sommet.

Propriété : on obtient les coordonnées du sommet avec les formules

$$\boxed{\alpha = -\frac{b}{2a}} \quad \text{et} \quad \boxed{\beta = f(\alpha)} .$$

Démonstration : d'après le calcul précédent on a $b = -2a\alpha \Leftrightarrow \alpha = -\frac{b}{2a}$;
de plus $f(\alpha) = a \times (\alpha - \alpha)^2 + \beta = a \times 0^2 + \beta = 0 + \beta = \beta$. C.Q.F.D.

Exemple : trouver a, b et c pour la parabole ci-dessous :



Il y a trois inconnues (a, b et c) donc il faut trois informations ; par exemple l'abscisse du sommet (α) et deux images. Ici :

$$\begin{cases} \alpha = 3 \\ f(4) = -1/2 \\ f(5) = 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= a \times (x-\alpha)^2 + \beta \\ &= a \times (x-3)^2 + \beta \\ &= a \times (x^2 - 6x + 9) + \beta \\ &= ax^2 - 6ax + 9a + \beta \end{aligned}$$

Puis : $\begin{cases} f(4) = -1/2 \\ f(5) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \times 4^2 - 6a \times 4 + 9a + \beta = -1/2 \\ a \times 5^2 - 6a \times 5 + 9a + \beta = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16a - 24a + 9a + \beta = -\frac{1}{2} \\ 25a - 30a + 9a + \beta = 2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + \beta = -1/2 \\ 4a + \beta = 2 \end{cases} \; L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \; \Leftrightarrow \begin{cases} a + \beta = -1/2 \\ 3a = 5/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -1/2 - a = -4/3 \\ a = 5/6 . \end{cases}$$

Reste à remplacer : $f(x) = ax^2 - 6ax + 9a + \beta = \underbrace{\frac{5}{6}}_{a} x^2 \underbrace{-5}_{b} x \underbrace{+\frac{37}{6}}_{c}$.

④ Existence de la forme canonique

Il s'agit de prouver que $ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous la forme $a \times (x-\alpha)^2 + \beta$. Allons-y :

On fait apparaître la première identité remarquable.

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \times \left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right] \\ &= a \times \left[\underbrace{x^2}_{A^2} \underbrace{+ 2 \times x \times \frac{b}{2a}}_{+\, 2 \times A \times B} \overbrace{\underbrace{+ \left(\frac{b}{2a}\right)^2}_{+\, B^2} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2}^{=0} + \frac{c}{a} \right] \end{aligned}$$

$$= a \times \left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c \times 4a}{a \times 4a}\right]$$

$$= a \times \left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$ ← On va utiliser cette expression-là plus tard.

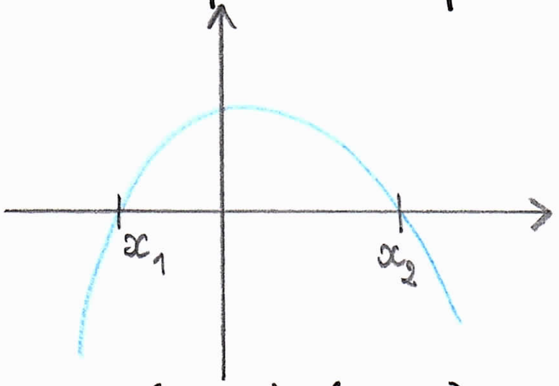
$$= a \times \left(x - \underbrace{\left(-\frac{b}{2a}\right)}_{\alpha}\right)^2 + \underbrace{\left(-\frac{b^2-4ac}{4a}\right)}_{\beta}.$$

C.Q.F.D.

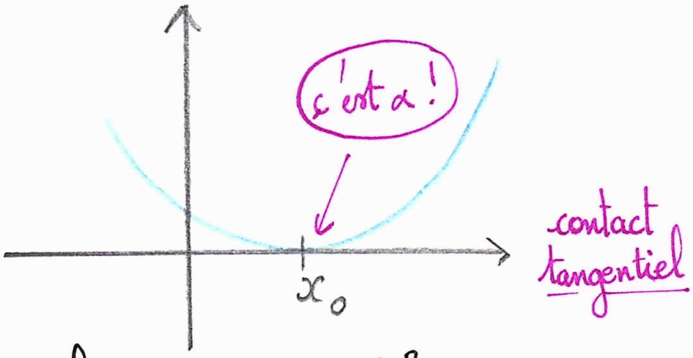
⑤ Forme factorisée

On commence par l'approche graphique.

PROPRIÉTÉ : $f(x) = ax^2+bx+c$ se factorise si et seulement si la parabole coupe l'axe des abscisses.



$f(x) = a \times (x - x_1) \times (x - x_2)$.



$f(x) = a \times (x - x_0)^2$.

Passons à l'approche algébrique.

DÉFINITION : le discriminant de $f(x) = ax^2+bx+c$ est $\boxed{\Delta = b^2-4ac}$.

On a donc $f(x) = a \times \left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right] = a \times \left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$.

PROPRIÉTÉ : $f(x)$ admet une forme factorisée si et seulement si $\Delta \geqslant 0$.

Démonstration : * si $\Delta < 0$ alors $\frac{-\Delta}{4a^2} > 0$ et donc $\underbrace{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}_{\geqslant 0} \underbrace{- \frac{\Delta}{4a^2}}_{>0} > 0$.

Ainsi $f(x)$ est du signe de a, et ne s'annule pas, donc ne se factorise pas.

*Si $\Delta=0$ on a directement $f(x) = a\times\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = a\times\left(x-\overbrace{\left(-\frac{b}{2a}\right)}^{x_0}\right)^2$.

* Si $\Delta>0$ on peut utiliser la troisième identité remarquable :

$$f(x) = a\times\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right] = a\times\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right]$$

$$= a\times\left[\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\times\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right]$$

$$= a\times\left[\left(x-\underbrace{\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)}_{x_1}\right)\times\left(x-\underbrace{\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)}_{x_2}\right)\right]$$

C.Q.F.D.

⑥ Équations & inéquations

PROPRIÉTÉ : l'équation $ax^2+bx+c=0$

i) n'admet aucune solution si $\Delta<0$,

c'est α !

ii) admet une solution si $\Delta=0$, donnée par $\boxed{x_0=-b/2a}$

iii) admet deux solutions si $\Delta>0$, données par les formules

$$\boxed{x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}} \quad \text{et} \quad \boxed{x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}.$$

Démonstration : * si $\Delta<0$ on a vu que $f(x)>0$ (si $a>0$) ou $f(x)<0$ (si $a<0$) pour tout x. En particulier n'est jamais égal à zéro.

*Si $\Delta=0$ on applique le théorème du produit nul à partir de la forme factorisée :

$$a\times(x-x_0)^2=0 \iff x=x_0.$$

* Si $\Delta>0$ on fait pareil, toujours à partir de la forme factorisée :

$$a\times(x-x_1)\times(x-x_2)=0 \iff x-x_1=0 \quad \text{ou} \quad x-x_2=0$$

$$x=x_1 \qquad\qquad x=x_2.$$

C.Q.F.D.

PROPRIÉTÉ : le signe de ax^2+bx+c est donné par :

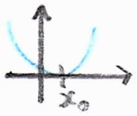
i) si $\Delta<0$:

x	$-\infty$	$+\infty$
ax^2+bx+c	signe de a	

ii) si $\Delta=0$:

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
ax^2+bx+c	signe de a	0	signe de a

attention, on passe par zéro sans changer de signe



iii) si $\Delta>0$:

ou x_2 et x_1, selon qui est le plus petit !

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
ax^2+bx+c	signe de a	0	signe contraire à a	0	signe de a

Démonstration : les cas $\Delta<0$ et $\Delta=0$ ont déjà été vus. Il reste le cas $\Delta>0$, où l'on utilise encore la forme factorisée (puisque dans ce cas, elle existe !) :

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
a	signe de a		signe de a		signe de a
$x-x_1$	$-$	0	$+$		$+$
$x-x_2$	$-$		$-$	0	$+$
$a\times(x-x_1)\times(x-x_2)$	signe de a	0	signe contraire de a	0	signe de a

un seul $\ominus$ donc le signe change !

C.Q.F.D.

Exemple 1 : résoudre $x^2-x-1=0$.

On a $\begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=-1 \end{cases}$ donc $\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4\times1\times(-1)=5$.

Puisque $\Delta>0$ il y a deux solutions :

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-1)+\sqrt{5}}{2\times1}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\simeq \underline{1{,}618}$$

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-1)-\sqrt{5}}{2\times1}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\simeq \underline{-0{,}618}.$$

Exemple 2 : résoudre $2x^2 - 3x + 1 \geqslant 0$.

On a $\begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \\ c = 1 \end{cases}$ donc $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 1$.

Puisque $\Delta > 0$ l'équation $2x^2 - 3x + 1 = 0$ a deux solutions

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3)+\sqrt{1}}{2\times 2} = \frac{3+1}{4} = 1$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3)-\sqrt{1}}{2\times 2} = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}$$

⚠ On a besoin de résoudre l'équation pour résoudre l'inéquation.

Le signe de $2x^2 - 3x + 1$ est donc

x	$-\infty$		$1/2$		1		$+\infty$
$2x^2-3x+1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

signe de a

L'ensemble des solutions de $2x^2 - 3x + 1 \geqslant 0$ est donc

$$\left]-\infty ; \frac{1}{2}\right] \cup [1 ; +\infty[.$$

Ne pas oublier la réponse après avoir fait le tableau de signes !