CALCUL AVEC LES FRACTIONS

① Égalité entre deux fractions

PRODUIT EN CROIX : lorsque $b, b' \neq 0$ on a $\boxed{\dfrac{a}{b} = \dfrac{a'}{b'} \iff a \times b' = a' \times b}$.

Plus généralement, lorsque les dénominateurs sont strictement positifs, on a $\dfrac{a}{b} < \dfrac{a'}{b'} \iff a \times b' < a' \times b$.

Exemple : comparer $\dfrac{5}{17}$ et $\dfrac{11}{36}$. On a $5 \times 36 = 180$ et $11 \times 17 = 187$

donc $5 \times 36 < 11 \times 17 \iff \dfrac{5}{17} < \dfrac{11}{36}$.

② Simplifications

RÈGLES : $\boxed{\dfrac{a}{b} \times \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \times c}{b \times d}}$ et $\boxed{a \times \dfrac{b}{c} = \dfrac{a \times b}{c} = \dfrac{a}{c} \times b}$.

Principe de la simplification : $\dfrac{a \times d}{b \times d} = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{d}{d} = \dfrac{a}{b} \times 1 = \dfrac{a}{b}$,

ce qu'on abrège en : $\dfrac{a \times \cancel{d}}{b \times \cancel{d}} = \dfrac{a}{b}$.

Exemples : * $\dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ ne se simplifie pas (le numérateur n'est pas sous la forme d'un produit) ;

* $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{10}} = \dfrac{\cancel{\sqrt{2}} \times \sqrt{3}}{\cancel{\sqrt{2}} \times \sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$.

DÉFINITION : une fraction d'entiers est irréductible lorsque le seul diviseur (positif) commun à son numérateur et son dénominateur est 1.

Remarque : il y a unicité de la forme irréductible : si $\frac{a}{b}$ et $\frac{a'}{b'}$ sont irréductibles, avec $a, a' \in \mathbb{Z}$ et $b, b' \in \mathbb{N}^*$, alors

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \implies \underline{a = a' \text{ et } b = b'}.$$

* Cas des petites fractions : on factorise en produit de nombres premiers, lorsqu'il n'y a plus rien en commun la fraction est irréductible.

Exemple : $$\frac{144}{160} = \frac{12 \times 12}{16 \times 10} = \frac{3 \times \cancel{4} \times 3 \times \cancel{4}}{\cancel{4} \times \cancel{4} \times 2 \times 5} \underset{\substack{2,3,5\\ \text{premiers}}}{=} \frac{9}{10} \text{ irréductible.}$$

* Grandes fractions : on calcule $d = PGCD(a;b)$ par l'algorithme d'Euclide ; la fraction simplifiée par d est irréductible. Si $d = 1$ elle l'est dès le départ.

Exemple :

division euclidienne

$$\underbrace{1001}_{a} = \underbrace{273}_{b} \times \underbrace{3}_{q} + \underbrace{182}_{r}$$
$$273 = 182 \times 1 + 91$$
$$182 = 91 \times 2 + \underline{0}.$$

le PGCD est le dernier reste non nul.

```
def PGCD(a,b):
    while b>0 :
        (a,b)=(b,a%b)
    return a
```

désigne le reste dans la division de a par b.

Donc $$\frac{1001}{273} = \frac{\cancel{91} \times 11}{\cancel{91} \times 3} = \frac{11}{3} \text{ irréductible.}$$

③ Puissances, racines, et autres simplifications

RÈGLES : $\boxed{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$ $\boxed{\frac{a^{m+k}}{a^{n+k}} = \frac{a^m}{a^n}}$ $\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}}$ $\boxed{a = \sqrt{a} \times \sqrt{a}}$.

Exemples :

* $$\frac{10^{-5}}{2 \times 10^{-3}} \left(\overset{+5}{=} \frac{10^0}{2 \times 10^2} \right) = \frac{1}{200}$$

* $$\frac{a}{\sqrt{a}} = \frac{\cancel{\sqrt{a}} \times \sqrt{a}}{\cancel{\sqrt{a}}} = \sqrt{a}$$

* $$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Dans certains cas, nous aurons à « forcer » des simplifications :

$$* \quad \frac{6x+2}{2x-1} = \frac{\cancel{x} \times (6 + 2/x)}{\cancel{x} \times (2 - 1/x)} = \frac{6 + \frac{2}{x}}{2 - \frac{1}{x}}$$

(première technique)

$$* \quad \frac{6x+2}{2x-1} = \frac{6x-3+5}{2x-1} = \frac{3 \times (2x-1) + 5}{2x-1} = \frac{3 \times \cancel{(2x-1)}}{\cancel{2x-1}} + \frac{5}{2x-1}$$

$$= 3 + \frac{5}{2x-1}.$$

(deuxième technique)

(4) Réductions au même dénominateur

RÈGLE : on ne peut additionner (ou soustraire) des fractions qu'après les avoir réduites au même dénominateur.

Exemples :

$$* \quad \frac{3_{\times 3}}{4_{\times 3}} + \frac{5_{\times 2}}{6_{\times 2}} = \frac{9}{12} + \frac{10}{12} = \frac{19}{12}$$

$$* \quad \frac{1_{\times \sqrt{x}}}{2\sqrt{x}_{\times \sqrt{x}}} + \frac{1_{\times 2}}{x_{\times 2}} = \frac{\sqrt{x}}{2x} + \frac{2}{2x} = \frac{\sqrt{x}+2}{2x}$$

Calcul du meilleur dénominateur (le PPCM) pour les fractions d'entiers :

* Méthode 1 (petites fractions) : on explore les multiples.

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{15} = ?$$

$10 \times 1 = 10$
$10 \times 2 = 20$
$10 \times 3 = 30$

$15 \times 1 = 15$
$15 \times 2 = 30$ PPCM

donc $\frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{3}{30} + \frac{2}{30} = \frac{5}{30} = \frac{\cancel{5}}{\cancel{5} \times 6} = \frac{1}{6}$.

il est possible que le résultat se simplifie, même si on a pris le meilleur dénominateur commun !

* Méthode 2 (petites fractions) : on décompose en produit de nombres premiers.

$$\frac{1}{24}+\frac{1}{30}+\frac{1}{40}=\frac{1}{2^3\times 3^1}+\frac{1}{2^1\times 3^1\times 5^1}+\frac{1}{2^3\times 5^1}$$

$$=\frac{5}{2^3.3^1.5^1}+\frac{4}{2^3.3^1.5^1}+\frac{3}{2^3.3^1.5^1}=\frac{12}{120}=\frac{1}{10}.$$

on complète avec les facteurs « manquants »

* Méthode 3 (grandes fractions) : on calcule $PPCM(b,b')=\dfrac{b\times b'}{PGCD(b,b')}$.

$$\frac{1}{1001}+\frac{1}{273}=\frac{3}{3003}+\frac{11}{3003}=\frac{14}{3003}$$

$PGCD(1001;273)=91$

donc $PPCM(1001;273)=\dfrac{1001\times 273}{91}=3003$

```
def PPCM(a,b):
    if a==0 or b==0:
        return 0
    else:
        return a*b // PGCD(a,b)
```

la division pour les entiers

5 Problèmes arithmétiques

Exemple 1 : soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer que la fraction $\dfrac{n}{n+1}$ est irréductible.

→ Soit d un diviseur commun à n et $n+1$. Alors il divise aussi $(n+1)-n=1$, donc $d=1$ (le seul diviseur de 1 est 1). On ne peut simplifier la fraction que par 1 donc elle est irréductible.

Exemple 2 : soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer que la fraction $\dfrac{n^2+1}{n^2+n+1}$ est irréductible.

→ Soit d un diviseur commun à n^2+1 et n^2+n+1. Alors il divise aussi $(n^2+n+1)-(n^2+1)=n$

donc aussi $n\times(n+1)=n^2+n$

donc aussi $(n^2+n+1)-(n^2+n)=1$.

Donc $d=1$ et la fraction ne peut se simplifier que par 1 : elle est irréductible.